Lyhyt matikka

9

Kertaus

Arno Aalto
Jukka Kangasaho
Outi Kylliäinen
Arja Metiäinen
Jukka Mäkinen
Jorma Tahvanainen

Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy
1.–6. painos, 2014

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
Lyhyt matikka 9 kertaus ISBN 978-952-63-1228-6

6 kk lisenssi 978-952-63-2381-7
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2382-4

Toimitus: Ville Sipiläinen
Ulkoasu: Liisa Holm
Taitto: Jukka Nieminen
Kuvitus: Timo Mäkelä
Matemaattiset piirrokset: Marja Venäläinen

© Arno Aalto, Jukka Kangasaho, Outi Kylliäinen, Arja Metiäinen,
Jukka Mäkinen, Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka
on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

K ä y t t ä j ä l l e

Sisältö

Tämä nide on laadittu oppikirjaksi lukion lyhyen matematiikan kertauskurssille sekä harjoitus- ja käsikirjaksi itsenäisesti kertaavalle. Kirja kokoaa yhteen lyhyen matematiikan pakollisten kurssien sisällöt.

Eteneminen

Kirja tukee yksilöllisiin tavoitteisiin ja runsaaseen harjoitteluun perustuvaa kertaamista. Lyhyen matematiikan sisällöt on ryhmitelty yhteentoista lukuun, joilla jokaisella on sama seuraavanlainen rakenne.

Taidanko?

Luvun avaa muutama pikkutehtävä luvun keskeisistä asioista. Tehtävät on pyritty sijoittelemaan niin väljästi, että ne voidaan nopeasti ratkaista suoraan kirjaan. Tehtävien avulla opiskelija voi itsenäisesti orientoitua luvun aihepiiriin ja arvioida kertaamisen tarvetta. Tämän jälkeen opiskelija voi esimerkiksi ryhtyä yksityiskohtaiseen kertaamiseen helpompien harjoitusten avulla. Hän voi myös suoraan siirtyä luvun päättäviin tehtäviin ja ratkoa niitä teoriakertauksen ja tehtävien ratkaisuissa annettujen ohjeiden tuella.

Teoriakertaus, esimerkit ja harjoitukset

Luvun aihepiiri on jaettu pienempiin kokonaisuuksiin, joissa esimerkkien avulla kerrataan teoriaa ja keskeisiä ongelmatyyppejä. Jokaisen kokonaisuuden päättää muutama harjoitus, jotka ylioppilaskokeen parin ensimmäisen tehtävän tavoin keskittyvät yleensä perustaitojen ja -tietojen hallintaan.

Tehtävät

Luvun päättävät tehtävät kattavat monipuolisesti luvun aihepiirin. Tehtävät on pyritty järjestämään vaativuustason mukaisesti. Jokaisen tehtävän vastauksen yhteydessä on ratkaisuohjeita.

Tehtäväsarjat

Kokoavaa kertaamista varten kirjassa on seitsemän tehtäväsarjaa, jotka sisältävät tehtäviä siihen mennessä kerratuista aihepiireistä.

Toivotamme tuloksellista kertaamista.

Helsingissä 22.5.2007

Tekijät

Sisällys

Lukuja ja laskutoimituksia 7
Murtoluvuilla laskeminen 8
Hinta 12
Yksikkömuunnoksia 13
Nopeus, matka ja aika 15

Prosenttilaskenta 19
Prosentti 20
Muutos ja vertailu 23

Polynomilaskenta ja ensimmäisen asteen yhtälö 31
Polynomilaskenta 32
Ensimmäisen asteen yhtälö 36
Verrannollisuus 38

Neliöjuuri ja toisen asteen yhtälö ... 43
Neliöjuuri 44
Toisen asteen yhtälö 47
Funktion arvojen merkki 51

Potenssi ja eksponenttifunktio 57
Potenssi 58
Eksponenttifunktio 64
Logaritmi 66
Potenssiyhtälö 70

Lukujonot ja summat 77
Lukujono 78
Aritmeettinen jono ja summa 82
Geometrinen jono ja summa 87

Tehtäväsarjoja 94
Sarja A 94
Sarja B 95

Tasogeometria 97
Yhdenmuotoisuus 98
Pythagoraan lause 104
Trigonometria 107
Monikulmioita 112
Ympyrä 116
Ympyrän tangentti 122

Avaruusgeometria 127
Suorakulmainen särmiö 128
Lieriö 131
Kartio 133
Pallo 137

Tehtäväsarjoja 141
Sarja C 141
Sarja D 142

Suora 145
Lineaarinen muutos ja kulmakerroin 146
Suoran yhtälö 150
Kahden muuttujan yhtälö ja epäyhtälö 155
Yhtälöpari 159
Lineaarinen optimointi 162

Derivaatta ja funktion kulku 171
Kasvunopeus ja derivaatta 172
Polynomifunktion derivaatta 175
Derivaatta ja paraabeli 180
Funktion kulun tutkiminen 185
Funktion suurin ja pienin arvo välillä 190

Todennäköisyys ja tilastot 197
Todennäköisyys 198
Todennäköisyyksien laskusääntöjä 202
Valintojen laskeminen 209
Tilasto-oppia 212
Normaalijakauma 216

Tehtäväsarjoja 224
Sarja E 224
Sarja F 225
Sarja G 226

Vastaukset 229

Hakemisto 288

Lukuja ja laskutoimituksia

1. Laske ilman laskinta.

a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10}$ b) $2 - \frac{5}{6}$

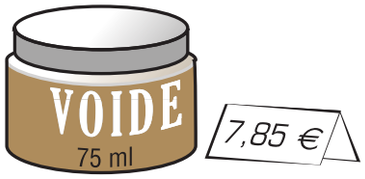
c) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}$ d) $\frac{2}{9} : \frac{4}{3}$

2. a) Muunna neliömetreiksi. b) Muunna kuutiometreiksi.

$600\ \text{dm}^2 =$ _____ $500\ \text{dm}^3 =$ _____

$0{,}5\ \text{ha} =$ _____ $25\ 000\ \text{cm}^3 =$ _____

3. a) Kuinka paljon bensiiniä saa 100 eurolla?



b) Laske ihovoiteen litrahinta.

4. Muunna tunnit minuuteiksi ja minuutit tunneiksi.

2,5 h = _____ min 45 min = _____ h

0,3 h = _____ min 10 min = _____ h

5. a) Kuinka paljon aikaa kuluu 200 kilometrin matkalla?
b) Kuinka pitkä matka kuljetaan 25 minuutissa?

Tehtävien vastaukset ovat seuraavalla sivulla.

Murtoluvuilla laskeminen

ESIMERKKI 1 Laske. a) $\frac{3}{8} + \frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{9}$ c) $\frac{8}{15} : \frac{6}{7}$

RATKAISU

a) $\frac{3}{8} + \frac{5}{6}$ (3) (4) — Murtoluvut lavennetaan samannimisiksi.*

$= \frac{9}{24} + \frac{20}{24}$ — Osoittajaksi tulee osoittajien summa ja nimittäjäksi yhteinen nimittäjä.

$= \frac{9 + 20}{24}$

$= \frac{29}{24} = 1\frac{5}{24}$ — Summan arvo voidaan ilmaista myös sekalukuna.

b) $\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{9}$ — Tulon osoittajaksi tulee osoittajien tulo ja nimittäjäksi nimittäjien tulo.

$= \frac{5 \cdot \cancel{7}^{1}}{\cancel{14}^{2} \cdot 9}$ — Ennen kertolaskujen suorittamista supistetaan, jos mahdollista.

$= \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 9} = \frac{5}{18}$

* Jos tehtävän ilmeisenä tarkoituksena on testata murtolukujen laskusääntöjen hallitsemista, ratkaisuun on kirjattava oleelliset laskusääntöihin perustuvat välivaiheet. Laskut kannattaa tarkistaa laskimen murtolukutoiminnoilla. Jos murtolukulasku esiintyy esimerkiksi geometrisen tehtävän tuloksen loppusievennyksessä, lasku voidaan suorittaa kokonaan laskimen murtolukutoiminnoilla.

TAIDANKO? VASTAUKSET

1. a) $\frac{7}{10}$ b) $1\frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{1}{6}$

2. a) 6 m^2, 5 000 m^2 b) 0,5 m^3, 0,025 m^3

3. a) 80,3 l b) 104,67 €/l

4. 150 min, 18 min, 0,75 h, 0,17 h

5. a) 2,5 h b) 33 km

c) $\frac{8}{15} : \frac{6}{7}$ Jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

$= \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{6} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7}{15 \cdot \underset{3}{\cancel{6}}}$ Supistetaan.

$= \frac{4 \cdot 7}{15 \cdot 3} = \frac{28}{45}$

VASTAUS a) $\frac{29}{24} = 1\frac{5}{24}$ b) $\frac{5}{18}$ c) $\frac{28}{45}$

ESIMERKKI 2 Laske lausekkeen $x - \frac{1}{x}$ arvo, kun $x = 1\frac{2}{3}$.

RATKAISU Luku $\frac{1}{x}$ on luvun x käänteisluku.

Sekaluku muutetaan murtoluvuksi: $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

Luvun $\frac{5}{3}$ käänteisluku on $\frac{3}{5}$.

Lausekkeen arvo on

$\frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{25}{15} - \frac{9}{15}$ Murtoluvut lavennetaan samannimisiksi.

$= \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$. Osoittajaksi tulee osoittajien erotus ja nimittäjäksi yhteinen nimittäjä.

VASTAUS $1\frac{1}{15}$

ESIMERKKI 3 Hannu söi kakusta kaksi viidesosaa ja Helena jäljelle jääneestä osasta yhden kuudesosan. Kuinka suuri osa kakusta jäi jäljelle?

RATKAISU Merkitään alkuperäistä kakun määrää a.* Kun Hannu oli syönyt kakusta kaksi viidesosaa, jäljellä oli kolme viidesosaa. Kolme viidesosaa määrästä a on

$$\frac{3}{5}a.$$

Kolme viidesosaa luvusta lasketaan kertomalla luvulla $\frac{3}{5}$.

Helenan käytyä kakulla jäljellä oli viisi kuudesosaa määrästä $\frac{3}{5}a$ eli

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}a$$

Viisi kuudesosaa luvusta lasketaan kertomalla luvulla $\frac{5}{6}$.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{6}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}}a = \frac{1}{2}a.$$

Jäljellä oli puolet kakusta.

VASTAUS puolet

* Koska määrää ei tunneta, on käytettävä kirjainta.

Harjoituksia

1. Laske.

a) $2 - \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ b) $\frac{3}{7} - \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$ c) $(-1 + 4 \cdot \frac{5}{18}) \cdot 1\frac{1}{2}$

2. Laske.

a) $1\frac{3}{7} : (-1\frac{3}{5})$ b) $\frac{1}{2} : (3 - 6 : \frac{2}{3})$

3. Laske

a) lausekkeen $-x^2 + 5x$ arvo muuttujan arvolla $\frac{1}{3}$

b) lausekkeen $x^2 + 4x$ arvo muuttujan arvolla $-\frac{2}{3}$.

4. Laske lausekkeen arvo, kun $x = \frac{2}{3}$.

a) $x + \frac{1}{x}$ b) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

5. Matti söi leivoksesta kuudesosan ja Tiina jäljelle jääneestä osasta neljäsosan. Mikä osa leivoksesta oli nyt jäljellä?

Hinta

ESIMERKKI 1 Pesujauhe maksoi 1 620 gramman pakkauksessa 2,89 euroa ja 540 gramman pakkauksessa 1,46 euroa. Laske kilogrammahinnat.

RATKAISU Painot ilmaistaan kilogrammoina ja hinta jaetaan kilogrammojen määrällä.

Suuremman pakkauksen paino on $1\,620\ \text{g} = 1{,}62\ \text{kg}$ ja kilohinta

$$\frac{2{,}89}{1{,}62} \approx 1{,}78\ (€/\text{kg}).$$

Hinta yhtä yksikköä kohden lasketaan jakamalla hinta yksikköjen määrällä.

Pienemmän pakkauksen paino on $540\ \text{g} = 0{,}54\ \text{kg}$ ja kilohinta

$$\frac{1{,}46}{0{,}54} \approx 2{,}70\ (€/\text{kg}).$$

VASTAUS suurempi pakkaus 1,78 €/kg, pienempi pakkaus 2,70 €/kg

Harjoituksia

6. Salaattiin ostettiin 417 grammaa tomaatteja ja 384 gramman painoinen kurkku. Tomaattien kilogrammahinta oli 3,43 €/kg ja kurkun 2,15 €/kg. Mikä salaatin kilogrammahinnaksi tuli?

7. Litra mustikoita maksoi torilla 1,50 euroa, ja kilogramma mustikoita maksoi kaupassa 2,15 euroa. Kotona punnittiin torilta ostetun mustikkalitran painoksi 620 grammaa. Kummassa paikassa mustikat olivat edullisempia?

Yksikkömuunnoksia

ESIMERKKI 1 Heinäkuun sademäärä oli 7,7 mm. Kuinka monta litraa vettä heinäkuussa satoi 2,5 aarin suuruiselle perunamaalle?

RATKAISU Koska $1\ \text{l} = 1\ \text{dm}^3$, on laskettava pellolle sataneen vesikerroksen tilavuus kuutiodesimetreinä. Tilavuus on pohjan pinta-alan 2,5 aaria ja korkeuden 7,7 mm tulo.

Yksikkömuunnokset:

$2{,}5\ \text{aaria} = 250\ \text{m}^2 = 25\ 000\ \text{dm}^2$, $\quad 1\ \text{aari} = 100\ \text{m}^2,\ 1\ \text{m}^2 = 100\ \text{dm}^2$

$7{,}7\ \text{mm} = 0{,}77\ \text{cm} = 0{,}077\ \text{dm}$. $\quad 1\ \text{mm} = 0{,}1\ \text{cm},\ 1\ \text{cm} = 0{,}1\ \text{dm}$

Vesikerroksen tilavuus on

$V = 25\ 000\ \text{dm}^2 \cdot 0{,}077\ \text{dm}$

$\approx 1\ 900\ \text{dm}^3 = 1\ 900\ \text{l}$.

Koska lähtötiedot 7,7 mm ja 2,5 aaria on annettu kahden numeron tarkkuudella, myös tehtävän tulos annetaan kahden numeron tarkkuudella.

VASTAUS 1 900 l

ESIMERKKI 2 Euroopan kultakaupat tapahtuvat pääasiassa Lontoon raaka-ainepörssissä. Eräänä päivänä kullan hinta Lontoossa oli 628,75 Yhdysvaltain dollaria unssilta. Samana päivänä dollarin kurssi oli 1 EUR = 1,3192 USD. Kuinka monta euroa maksoi tuona päivänä yksi kilogramma kultaa? Yksi unssi (oz) on 28,3495 grammaa.

RATKAISU Lasketaan, kuinka monta unssia yksi kilogramma on.

Koska 1 oz = 28,3495 g, niin

$$1 \text{ g} = \frac{1}{28{,}3495} \text{ oz}$$

ja

$$1 \text{ kg} = 1\,000 \text{ g} = 1\,000 \cdot \frac{1}{28{,}3495} \text{ oz} \approx 35{,}274 \text{ oz}.$$

Kultakilon hinta dollareina oli

$35{,}274 \cdot 628{,}75$ USD.

Koska 1 EUR = 1,3192 USD, niin

$$1 \text{ USD} = \frac{1}{1{,}3192} \text{ EUR}.$$

Kultakilon hinta euroina oli

$$35{,}274 \cdot 628{,}75 \cdot \frac{1}{1{,}3192} \text{ EUR} \approx 16\,812{,}10 \text{ EUR}.$$

VASTAUS 16 812,10 €

Harjoituksia

8. Metsänistutuksessa arvioidaan, että jokainen puuntaimi tarvitsee 4,0 neliömetrin suuruisen alueen. Kuinka monta tainta voidaan enintään istuttaa 10 hehtaarin alueelle?

9. Aikuinen ottaa yskänlääkettä 15 ml kolme kertaa vuorokaudessa. Kuinka pitkäksi ajaksi puolen litran pullollinen lääkettä riittää?

10. 1,5 nesteunssin parfyymipullo maksoi Yhdysvalloissa 3,85 dollaria. Mikä oli parfyymin litrahinta euroina? Yksi nesteunssi (fl oz) on 29,573 millilitraa. Käytä dollarin kurssia 1 EUR = 1,3298 USD.

Nopeus, matka ja aika

ESIMERKKI 1

140 kilometrin matkasta puolet ajettiin keskinopeudella 80 km/h. Millä keskinopeudella loppumatka on ajettava, jotta keskinopeudeksi koko matkalla tulisi 70 km/h?

RATKAISU

Jotta keskinopeus koko 140 km:n matkalla olisi 70 km/h, matkaan tulee käyttää aikaa

$$\frac{140}{70}\ \text{h} = 2\ \text{h}. \qquad \text{aika} = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}}$$

Tähän mennessä on ajettu 70 km keskinopeudella 80 km/h, joten aikaa on mennyt

$$\frac{70}{80}\ \text{h} = 0{,}875\ \text{h}.$$

Loppumatka on ajettava ajassa $2\ \text{h} - 0{,}875\ \text{h} = 1{,}125\ \text{h}$.
Keskinopeuden loppumatkalla tulee olla

$$\frac{70}{1{,}125}\ \text{km/h} \approx 62\ \text{km/h}. \qquad \text{nopeus} = \frac{\text{matka}}{\text{aika}}$$

VASTAUS

62 km/h

Harjoituksia

11. Mikä tuli keskinopeudeksi kolme tuntia kestäneellä matkalla, kun ensimmäinen tunti ajettiin keskinopeudella 100 km/h ja loput kaksi tuntia keskinopeudella 70 km/h?

12. Ranskan ympäriajossa etappivoittajan aika oli 3.38.35 ja keskinopeus 42,47 km/h. Kuinka pitkä etappi oli?

13. a) Kuinka monta metriä sekunnissa kulkee auto, jonka nopeus on 57 km/h?
b) Voittajan aika 400 metrin juoksussa oli 46,18 s. Mikä hänen keskinopeutensa oli yksikkönä kilometriä tunnissa?

14. Ravikilpailuissa hevosen aika ilmaistaan yleensä ns. kilometriaikana, joka on yhdelle kilometrille käytetty keskimääräinen aika. Mikä kilometriaika on, jos hevonen juoksee mailin (1 609 m) ajassa 1.59,4?

15. Syksyllä 1996 avattiin liikenteelle 25,8 km:n pituinen osuus moottoritietä Hämeenlinnan pohjoispuolella välillä Ojoinen–Jutikkala. Tien alle jäi maata 253 hehtaaria. Kuinka monta metriä leveä on tämän perusteella moottoritiealue?
(Ylioppilaskoe, s. 1999)

16. a) Suomen valtion budjetti on useita vuosia ollut noin 200 miljardia markkaa. Jos tämä rahasumma jaettaisiin tasan kaikille suomalaisille, kuinka paljon kukin saisi (markkoina)? Suomen väkiluku on noin viisi miljoonaa.
b) Minä vuonna täyttää 1983 syntynyt henkilö yhden gigasekunnin (= 10^9 sekuntia)? Laskussa ei tarvitse ottaa huomioon karkausvuosia. (Ylioppilaskoe, k. 2002)

17. Potilas, joka painaa 75 kg, saa lääkettä tiputuksena verisuoneen. Annostus riippuu henkilön painosta siten, että annostusnopeuden on oltava 10 mikrogrammaa minuutissa henkilön jokaista painokiloa kohti. Lääke annetaan laimennettuna tiputusliuoksena; 1 ml kyseistä liuosta sisältää 500 mikrogrammaa lääkeainetta. a) Kuinka monta millilitraa tiputusliuosta minuutissa potilaalle tällöin annetaan? b) Kuinka kauan kestää 465 ml:n liuoksen tiputus? (Ylioppilaskoe, k. 2005)

18. Amerikkalaisen automainoksen mukaan auto kulkee 18 mailia yhdellä gallonalla polttoainetta. Kuinka monta litraa polttoainetta auto kuluttaa sadalla kilometrillä? Maili on 1 609 metriä ja amerikkalainen gallona 3,7854 litraa.

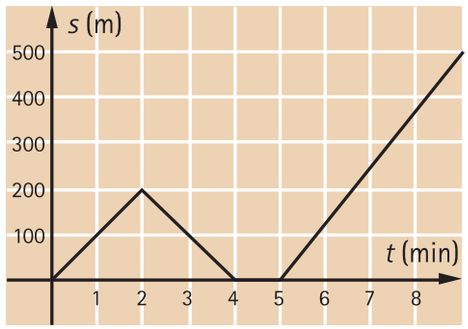
19. Määritä lausekkeen $x^2 - 6x + 5$ arvo sillä x:n arvolla, joka toteuttaa yhtälön $3x + 1 = 0$. (Ylioppilaskoe, s. 1998)

20. Reaaliluvut a, b ja f toteuttavat yhtälön $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. Mikä on b:n arvo, kun $a = 5$ ja $f = 11$? (Ylioppilaskoe, k. 1996)

21. Määritä lausekkeen $\frac{ax}{b}$ arvo, kun $a = \frac{2}{5}$ ja x on kolmasosa b:stä.
(Ylioppilaskoe, s. 1999)

22. Autoilija ajoi 28 kilometriä pitkän tieosuuden nopeudella 80 km/h. Lopun matkasta hän ajoi moottoritietä pitkin. Millä keskinopeudella hän ajoi moottoritieosuuden, kun hän perille tultuaan totesi keskinopeuden koko 75 kilometrin ajomatkansa osalta olleen 100 km/h? (Ylioppilaskoe, k. 2006)

23. Kuvaaja esittää Villen koulumatkaa kotoa kouluun. Vaaka-akselilla on aika (minuutteina) ja pystyakselilla etäisyys kotoa (metreinä). Ville lähtee maanantaiaamuna klo 8.00 jalan kotoa kouluun. Kun hän on kulkenut jonkin matkaa, hän huomaa unohtaneensa koululaukkunsa kotiin ja palaa sitä noutamaan. Hän lähtee kotoa uudelleen ja kulkee ripeästi ehtiäkseen perille ajoissa.



a) Kuinka pitkä on Villen koulumatka? Kuinka paljon kello on hänen saapuessaan maanantaiaamuna perille kouluun? Millä nopeudella (km/h) hän kulki noudettuaan laukkunsa?
b) Piirrä vastaavalla tavalla kuvaaja tilanteesta, jossa polkupyöräilijä lähtee polkemaan 6 000 metrin päässä olevalle leirintäpaikalle. Hän etenee kymmenessä minuutissa 2 500 metriä, pysähtyy kioskille 6 minuutiksi ja ajaa sitten loppumatkan 20 minuutissa.
(Ylioppilaskoe, k. 2000)

24. Suomalainen Taisto Mäki alitti 10 000 metrin juoksussa ensimmäisenä maailmassa puolen tunnin rajan juoksemalla vuonna 1939 ajan 29 min 52,6 s. Marokon Salah Hissou juoksi vuonna 1996 tällä matkalla maailmanennätyksen 26 min 38,1 s. Kuinka paljon Mäellä olisi vielä ollut matkaa jäljellä Hissoun tullessa maaliin, jos he olisivat lähteneet yhtaikaa ja kumpikin olisi juossut tasaisella vauhdilla? Kuinka monta kierrosta tämä matka vastaa 400 metrin pituisella radalla? (Ylioppilaskoe, k. 1997)

25. Autojono ajaa tasaisella 100 km/h nopeudella, kun ensimmäinen autoilija havaitsee tiellä esteen. Oletetaan, että kukin autoilija alkaa jarruttaa 1,0 s sen jälkeen kun edellä ajava on ruvennut jarruttamaan. Autojen jarrutusmatkat vaihtelevat tämän ”kauhusekunnin” jälkeen renkaiden kunnon ym. syiden mukaan 150 m ja 200 m välillä. Kuinka pitkiä autojen välimatkojen tulisi olla ajettaessa, jotta jonon pysähdyttyä autot olisivat vielä vähintään 10 m päässä toisistaan?
(Ylioppilaskoe, s. 1996)

26. Lentokone lähtee aikataulun mukaan paikasta A klo 14.10 ja saapuu paikkaan B klo 17.00. Paluumatkalle lentokone lähtee B:stä klo 18.55, ja se on perillä A:ssa seuraavana päivänä klo 8.45. Paluumatka kestää tunnin enemmän kuin menomatka. Paljonko kello on paikassa B lentokoneen saapuessa A:han? Kaikki ilmoitetut ajat ovat paikallisia aikoja. (Ylioppilaskoe, s. 2002)

Prosenttilaskenta

1. Kuinka monta prosenttia 13 grammaa on 1,7 kilogrammasta?

2. Laske 3,2 % luvusta 375.

3. Mehun sokeripitoisuus on 18 %. Kuinka suureen mehumäärään 320 kg sokeria riittää?

4. Eeron palkkio 110 euroa oli 15 euroa Leenan palkkiota pienempi. Kuinka monta prosenttia Leenan palkkiota pienempi Eeron palkkio oli?

5. Polkupyörä maksoi keväällä 329 euroa. Kesällä hintaa alennettiin ensin 15 % ja myöhemmin vielä 20 %. Kuinka monta prosenttia pyörän hinta kaikkiaan laski kesän aikana?

Tehtävien vastaukset ovat seuraavalla sivulla.

Prosentti

Prosentti on sadasosa.

$$1\ \% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Kuinka monta prosenttia luku a on luvusta b?

Kun lasketaan, kuinka monta prosenttia luku a on luvusta b, niin suhde $\frac{a}{b}$ muutetaan prosenteiksi (sadasosiksi). Prosenttien määrä näkyy yleensä helpoimmin suhteen desimaalimuodosta.

Kuinka paljon on p prosenttia luvusta a?

Kun lasketaan, kuinka paljon on p prosenttia luvusta a, niin luku p ilmaistaan desimaalilukuna, jolla kerrotaan luku a.

ESIMERKKI 1 Vuoden 2005 lopussa Suomen väestö oli 5 255 580, joista 113 852 oli ulkomaiden kansalaisia. Kuinka monta prosenttia Suomen väestöstä oli ulkomaiden kansalaisia?

RATKAISU

$\frac{113\,852}{5\,255\,580} \approx 0{,}022$ Muodostetaan suhde ja lasketaan sen likiarvo.

$= 2{,}2\ \%$ Likiarvosta luetaan prosenttien (sadasosien) määrä.

VASTAUS 2,2 %

TAIDANKO? VASTAUKSET **1.** 0,76 % **2.** 12 **3.** 1 800 kg **4.** 12 % **5.** 32 %

ESIMERKKI 2 Eräässä kunnassa kunnallisveroprosentti on 19,5. Kuinka suuri kunnallisvero on, jos verotettavat vuositulot ovat 37 530,80 euroa?

RATKAISU

$19{,}5\ \% = 0{,}195$ 19,5 prosenttia (sadasosaa) ilmaistaan desimaalilukuna.

$0{,}195 \cdot 37\,530{,}80\ € \approx 7\,318{,}51\ €$

VASTAUS 7 318,51 €

ESIMERKKI 3 Juomasekoitus tehdään sekoittamalla kolme osaa mietoa juomaa, jonka alkoholipitoisuus on 12 %, ja kaksi osaa väkevää juomaa, jonka alkoholipitoisuus on 43 %. Mikä sekoituksen alkoholipitoisuus on?

RATKAISU

Yhden sekoitusosan suuruutta merkitään a.

Lasketaan sekoituksen määrä:
Miedon juoman määrä sekoituksessa on $3a$ ja väkevän juoman $2a$.
Sekoituksen määrä on $2a + 3a = 5a$.

Lasketaan sekoituksessa olevan alkoholin määrä:
Alkoholin määrä miedossa juomassa on $0{,}12 \cdot 3a = 0{,}36a$ ja
väkevässä juomassa $0{,}43 \cdot 2a = 0{,}86a$.

Alkoholin määrä on $0{,}36a + 0{,}86a = 1{,}22a$.

Seoksen alkoholipitoisuus on

$$\frac{1{,}22\cancel{a}}{5\cancel{a}} = \frac{1{,}22}{5} \approx 0{,}24 = 24\ \%.$$

VASTAUS 24 %

Perusarvon ratkaiseminen

Tuntematon perusarvo ratkaistaan yhtälön avulla.

ESIMERKKI 4 Hannan nettopalkka 26 prosentin veronpidätyksen jälkeen oli 1 697,20 euroa. Kuinka suuri Hannan bruttopalkka oli?

RATKAISU Merkitään bruttopalkkaa kirjaimella x.

Koska veronpidätys on 26 % bruttopalkasta, nettopalkka on $100\ \% - 26\ \% = 74\ \%$ bruttopalkasta x.

Ratkaistaan yhtälö:

$0{,}74x = 1\,697{,}20 \quad | : 0{,}74$ 74 % bruttopalkasta x on 1 697,20 €.

$$x = \frac{1\,697{,}20}{0{,}74} \approx 2\,293{,}51\ (€).$$

VASTAUS 2 293,51 euroa

Harjoituksia

27. Oppilaitoksen 318 aloituspaikalle oli 718 pyrkijää, joista 74 pääsi sisään todistusten perusteella ilman pääsykoetta. Kuinka monta prosenttia pääsykokeeseen osallistuneista sai aloituspaikan?

28. Kaivoksen malmin kuparipitoisuus on 1,4 %. Malmia louhitaan vuodessa 2,3 miljoonaa tonnia. Kuinka paljon kuparia saadaan?

29. Henkilöllä oli pankissa talletettuna 4 781,30 euroa tilille, jonka korko on 1,50 %, ja 12 312,00 euroa toiselle kiinteäkorkoiselle tilille. Talletuksista hän sai yhteensä korkoa 348,74 euroa. Mikä toisen tilin korkoprosentti on?

30. a) Kolmeen kilogrammaan 6,0-prosenttista suolaliuosta lisättiin litra (kilogramma) vettä. Mikä uuden liuoksen suolapitoisuus oli?
b) Kolmeen kilogrammaan 6,0-prosenttista suolaliuosta liuotettiin 400 grammaa suolaa. Mikä uuden liuoksen suolapitoisuus oli?
c) Kolmeen kilogrammaan 6,0-prosenttista suolaliuosta lisättiin kaksi kilogrammaa 12-prosenttista liuosta. Mikä uuden liuoksen suolapitoisuus oli?

31. Yhdessä saapasparissa on 8,4 dm^2 nahkaa. Kun nahkoja leikataan, 23 % nahasta menee hukkapaloihin. Kuinka monta neliömetriä nahkaa tarvitaan, kun valmistetaan 300 samanlaista saapasparia?

Muutos ja vertailu

ESIMERKKI 1 540 euron hintaa alennettiin 15 %. Määritä alennettu hinta.

RATKAISU

Tapa 1. Lasketaan ensin, kuinka monta prosenttia alennettu hinta on alkuperäisestä hinnasta.

$100\ \% - 15\ \% = 85\ \%$ Alennettu hinta on 85 % alkuperäisestä hinnasta.

Alennettu hinta on

$0{,}85 \cdot 540\ € = 459\ €.$

Tapa 2. Lasketaan ensin alennuksen suuruus.

$0{,}15 \cdot 540\ € = 81\ €$

Alennettu hinta on

$540\ € - 81\ € = 459\ €.$

VASTAUS 459 euroa

ESIMERKKI 2 Eräässä ammattiryhmässä naisten keskipalkka on 2 899 euroa ja miesten 3 168 euroa. Kuinka monta prosenttia naisten palkkaa suurempi miesten palkka on?

RATKAISU *Tapa 1.* Lasketaan ensin, kuinka monta prosenttia miesten palkka on naisten palkasta.

$\frac{3\ 168}{2\ 899} \approx 1{,}093 = 109{,}3\ \%$

Nimittäjänä on arvo, johon verrataan. Koska miesten palkka on naisten palkkaa suurempi, tulos on yli 100 %.

Miesten palkka on $109{,}3\ \% - 100\ \% = 9{,}3\ \%$ naisten palkkaa suurempi.

Tapa 2. Lasketaan ensin, kuinka paljon miesten palkka on naisten palkkaa suurempi.

$3\ 168\ € - 2\ 899\ € = 269\ €$

Koska

$\frac{269}{2\ 899} \approx 0{,}093 = 9{,}3\ \%,$

Nimittäjänä on arvo, johon verrataan.

miesten palkka on $9{,}3\ \%$ naisten palkkaa suurempi.

VASTAUS 9,3 %

ESIMERKKI 3 Matkamittari mittasi 16,7 km:n pituisen matkan pituudeksi 15,4 km. Kuinka monta prosenttia mittarivirhe on?

RATKAISU Lasketaan, kuinka monta prosenttia mittarin näyttämä matka 15,4 km on todellista matkaa 16,7 km pienempi.

Tapa 1. Lasketaan ensin, kuinka monta prosenttia mittarin lukema on todellisesta matkasta.

$$\frac{15{,}4}{16{,}7} \approx 0{,}922 = 92{,}2\ \%$$

Nimittäjänä on arvo, johon verrataan. Koska mittarin lukema on todellista matkaa pienempi, tulos on alle 100 %.

Mittarin lukema on $100\ \% - 92{,}2\ \% = 7{,}8\ \%$ todellista matkaa pienempi.

Tapa 2. Lasketaan ensin, kuinka paljon mittarin lukema on todellista matkaa pienempi.

$16{,}7\ \text{km} - 15{,}4\ \text{km} = 1{,}3\ \text{km}$

Koska

$$\frac{1{,}3}{16{,}7} \approx 0{,}078 = 7{,}8\ \%,$$

Nimittäjänä on arvo, johon verrataan.

mittarin lukema on 7,8 % todellista matkaa pienempi.

VASTAUS 7,8 %

ESIMERKKI 4 Sellun tonnimääräinen vienti kasvoi edellisestä vuodesta 18,2 %, mutta sellutonnin hinta aleni 17,3 %. Kuinka monta prosenttia viennin arvo väheni tai kasvoi?

RATKAISU Viennin arvo on vietyjen tonnien määrän ja sellutonnin hinnan tulo.

Olkoon a vietyjen tonnien määrä ja b sellutonnin hinta edellisenä vuotena.

Viennin arvo edellisenä vuotena oli ab.

Vietyjen tonnien määrä a kasvoi 18,2 %, joten vienti jälkimmäisenä vuotena on $1{,}182a$.

Hinta b laski 17,3 %. Hinta jälkimmäisenä vuotena on $0{,}827b$.

Muuttunut viennin arvo on

$$1{,}182a \cdot 0{,}827b = 1{,}182 \cdot 0{,}827 \cdot ab \approx 0{,}978ab.$$

Viennin arvo on tullut 0,978-kertaiseksi. Uusi viennin arvo on 97,8 % edellisen vuoden arvosta. Viennin arvo väheni

$$100\ \% - 97{,}8\ \% = 2{,}2\ \%.$$

VASTAUS Väheni 2,2 %.

Kun vertaillaan prosentteina ilmaistuja suhteellisia osuuksia, niin prosenttilukujen erotuksen yksikkö on *prosenttiyksikkö.*

ESIMERKKI 5 Vaihtuvaan viitekorkoon sidottu asuntolainan korko nousi vuoden aikana 3,17 %:sta 4,48 %:iin. Kuinka lainan korko muuttui?

RATKAISU Lainan korko nousi $4{,}48 - 3{,}17 = 1{,}31$ prosenttiyksikköä.

VASTAUS Nousi 1,31 prosenttiyksikköä.

Harjoituksia

32. Alennusmyynnin loppuvaiheessa 30 %:lla alennettua hintaa alennetaan vielä 40 %. Paljonko maksaa nyt puku, joka alunperin maksoi 520,00 euroa?

33. Rataosuuden peruskorjaus lyhensi matka-aikaa 17 minuutilla niin, että uusi aika oli tunti ja 12 minuuttia. Kuinka monta prosenttia matka-aika lyheni?

34. Vuonna 1980 Suomessa oli 19 700 suomenhevosta ja 10 486 lämminveristä hevosta. Vuonna 2005 suomenhevosia oli 19 310 ja lämminverisiä 36 800.
a) Kuinka monta prosenttia suomenhevosten määrä on vähentynyt ja lämminveristen määrä kasvanut?
b) Kuinka monta prosenttia suomenhevosten määrää suurempi lämminverihevosten määrä oli vuonna 2005?

35. Eilan ennakonpidätysprosentti tammikuussa oli 31. Uudessa, helmikuun alussa voimaan tulevassa verokortissa ennakonpidätys on kaksi prosenttiyksikköä pienempi. Kuinka monta prosenttia nousee 3 815,00 euron kuukausipalkasta käteen jäävä määrä?

36. Hannu ja Maria jakoivat 565 euron palkkion niin, että Maria sai 15 % enemmän kuin Hannu. Kuinka paljon kumpikin sai?

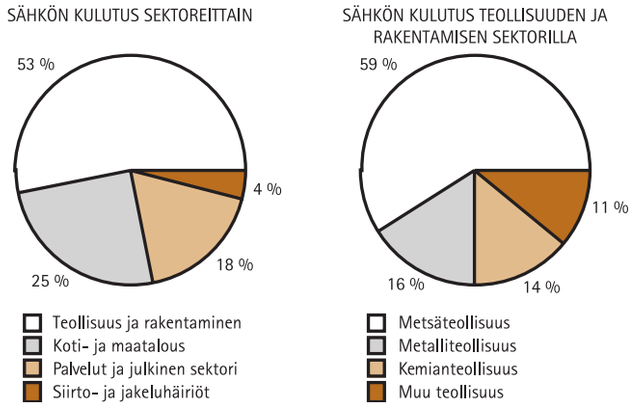
37. Joulusesongin ajaksi tuotteen hintaa nostettiin 18 %. Joulun jälkeisessä alennusmyynnissä tuotetta myydään 30 %:n alennuksella. Kuinka monta prosenttia alennusmyyntihinta on joulusesonkia edeltävää hintaa suurempi tai pienempi?

38. Kun torikauppias alensi mansikoiden kilohintaa 30 %, myynti lisääntyi 60 %. Kuinka muuttuivat myynnistä saadut tulot?

39. Boolin valmistukseen käytettiin 0,4 litraa marjamehua, puoli litraa vodkaa ja 1,5 litraa soodavettä. Vodkan alkoholipitoisuus on 38 tilavuusprosenttia. Paljonko boolissa oli alkoholia a) litroina, b) tilavuusprosentteina? (Ylioppilaskoe, s. 2005)

40. Yrityksen liikevaihto oli vuoden toisella neljänneksellä 11 % pienempi kuin vuoden ensimmäisellä neljänneksellä. Kokonaisuudessaan yrityksen liikevaihto kyseisen puolen vuoden osalta oli 6,0 miljoonaa euroa. Kuinka suuri yrityksen liikevaihto oli vuoden ensimmäisellä neljänneksellä?
(Ylioppilaskoe, k. 2001)

41. Sähkönkulutuksen jakauma vuonna 2001 käy ilmi alla olevista diagrammeista. Palveluiden ja julkisen sektorin kulutus oli 14 717 GWh. (Lähde: Ympäristötilasto 2002.) Kuinka suuri oli metalliteollisuuden sähkönkulutus kyseisenä vuonna?
(Ylioppilaskoe, k. 2003)



42. Suomen EU-äänestyksessä annettiin KYLLÄ-ääniä 57 % ja EI-ääniä 43 % äänestysprosentin ollessa 71. Kuinka monta prosenttia KYLLÄ-äänien määrä oli äänioikeutettujen määrästä? (Ylioppilaskoe, k. 1996)

43. Erään obligaation vuotuinen korko on 5 %. Maksetusta korosta peritään 28 % lähdevero. a) Mikä on obligaation todellinen korko? b) Mikä obligaation vuotuisen koron tulisi olla, jotta todellinen korko olisi 5 %? (Ylioppilaskoe, k. 1997)

44. Vuonna 1995 erään pesujauheen markkinaosuus oli 15 %. Vuonna 1996 tämän pesujauheen myynti kasvoi 20 % ja pesujauheiden kokonaismyynti kasvoi 10 %. Mikä oli ko. pesujauheen markkinaosuus vuonna 1996? (Ylioppilaskoe, s. 1998)

45. Työssä olevien lääkäreiden määrä kasvoi vuodesta 1996 vuoteen 2006 32 %. Lääkäreistä oli vuonna 1996 miespuolisia 54 % ja vuonna 2006 46 %. Kuinka monta prosenttia naispuolisten lääkäreiden määrä tänä aikana kasvoi?

46. Liikennevakuutuksen perusmaksu nousi 11,6 %, mutta samalla henkilön perusmaksusta saama alennus (ns. bonus) nousi 65 %:sta 70 %:iin. Kuinka monta prosenttia henkilön maksama liikennevakuutusmaksu suureni tai pieneni?

47. Laitteen hinta kodinkoneliikkeessä muodostuu liikkeen maksamasta tukkuhinnasta, siihen lisätystä kaupan myyntikatteesta ja näin saatuun verottomaan hintaan lisätystä 22 %:n arvonlisäverosta. Liikkeen maksama tukkuhinta eräästä televisiomallista on 502 euroa. Kuinka suureksi liike asettaa television hinnan, jotta se voisi myydä televisiota tarjoushinnalla 20 %:n alennuksella ja saada silti myyntikatteen, joka on 30 % tukkuhinnasta? Kuinka monta prosenttia myyntikate on tukkuhinnasta, kun kauppa myy televisiota normaalihinnalla?

48. Muropakettia suurennettiin siten, että siihen mahtui 10 % enemmän muroja kuin aikaisemmin. Samalla hintaa korotettiin 12 %. Muutoksen seurauksena paketteja myytiin 10 % aikaisempaa vähemmän. Lisääntyikö vai vähentyikö murojen myynti mitattuna a) murojen painona, b) rahana? Kuinka monta prosenttia muutos oli?
(Ylioppilaskoe, k. 2002)

49. Pankkilainaa hoidetaan kuukausittain maksamalla korkoa ja 500 euron lyhennys. Lainalla on kiinteä korko 5,13 %. Helmikuussa 2006 lainan hoitokulut olivat 595,88 euroa. Milloin laina on kokonaan maksettu?

50. Tilastokeskuksen kuluttajabarometrin mukaan heinäkuussa 1999 matkapuhelin oli kotitalouksissa ensi kertaa lankapuhelinta yleisempi. Kotitalouksista 78,5 prosentilla oli käytössään matkapuhelin ja 75,8 prosentilla lankapuhelin. Kotitalouksista 22,9 prosentilla oli vain matkapuhelin. Kuinka monella prosentilla kotitalouksista oli käytössä vain lankapuhelin? Kuinka monella prosentilla niistä kotitalouksista, joilla oli käytössä lankapuhelin, oli käytössään myös matkapuhelin? (Ylioppilaskoe, k. 2000)

51. Turpeessa on vettä aluksi 60 %. Kuinka monta prosenttia vedestä on haihdutettava, jotta turpeessa tämän jälkeen olisi vain 20 % vettä? (Ylioppilaskoe, s. 1992)

Polynomilaskenta ja ensimmäisen asteen yhtälö

1. Sievennä.

a) $2x + 3x$

b) $2x \cdot 3x$

c) $2(x - 3)$

d) $x - 3(2 - x)$

2. a) Laske lausekkeen $-5x + 4$ arvo, kun $x = 2$.

b) Millä x:n arvolla lauseke $-5x + 4$ saa arvon -5?

3. Ratkaise yhtälö $\frac{x}{4} - 2 = 5$.

4. Ratkaise yhtälö $\frac{x-2}{x+1} = \frac{2}{3}$.

Tehtävien vastaukset ovat seuraavalla sivulla.

Polynomilaskenta

ESIMERKKI 1 Laske polynomien $x^2 + 3x - 6$ ja $-4x^2 + x - 2$ summa.

RATKAISU

$(x^2 + 3x - 6) + (-4x^2 + x - 2)$ Sulkeet poistetaan niin, että polynomien termit kirjoitetaan peräkkäin.

$= x^2 + 3x - 6 - 4x^2 + x - 2$ Yhdistetään samaa astetta olevat termit.

$= -3x^2 + 4x - 8$

VASTAUS $-3x^2 + 4x - 8$

ESIMERKKI 2 Laske polynomien $x^3 - 2x + 4$ ja $-x^2 + 3x - 5$ erotus.

RATKAISU

$(x^3 - 2x + 4) - (-x^2 + 3x - 5)$ Vaihdetaan vähentäjän termien merkit ja kirjoitetaan polynomit peräkkäin.

$= x^3 - 2x + 4 + x^2 - 3x + 5$

$= x^3 + x^2 - 5x + 9$

VASTAUS $x^3 + x^2 - 5x + 9$

TAIDANKO? VASTAUKSET

1. a) $5x$ b) $6x^2$ c) $2x - 6$ d) $4x - 6$ **2.** a) -6 b) $x = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$

3. $x = 28$ **4.** $x = 8$

ESIMERKKI 3 Laske termien $-3x^2$ ja $5x$ tulo.

RATKAISU

$(-3x^2)(5x)$ — Tulon kertoimeksi tulee kertoimien tulo ja muuttujaosaksi muuttujaosien tulo.

$= -3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x$ — Muuttujan potenssit kerrotaan purkamalla ne tuloiksi tai käyttämällä samankantaisten potenssien tulon kaavaa $a^m a^n = a^{m+n}$.

$= -3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x$

$= -15x^3$

VASTAUS $-15x^3$

ESIMERKKI 4 Laske $7x^2 - 2x^2(x - 3)$.

RATKAISU Laskujärjestyssääntöjen mukaisesti kertolasku lasketaan ensin.

Tapa 1. Kerrotaan ensin termillä $2x^2$.

$7x^2 - 2x^2(x - 3) = 7x^2 - (2x^3 - 6x^2)$ — Kertolaskun tulos merkitään sulkeisiin.

$= 7x^2 - 2x^3 + 6x^2$ — Suoritetaan vähennyslasku.

$= -2x^3 + 13x^2$

Tapa 2. Yhdistetään kertolasku ja polynomien vähennyslasku kertomalla suoraan termillä $-2x^2$.

$7x^2 - 2x^2(x - 3) = 7x^2 - 2x^3 + 6x^2$ — $-2x^2 \cdot x = -2x^3$ ja $-2x^2 \cdot (-3) = +6x^2$.

$= -2x^3 + 13x^2$

VASTAUS $-2x^3 + 13x^2$

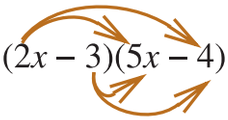
ESIMERKKI 5 Laske

a) polynomien $2x - 3$ ja $5x - 4$ tulo

b) polynomin $2x - 3$ neliö $(2x - 3)^2$.

RATKAISU

a) $(2x - 3)(5x - 4)$



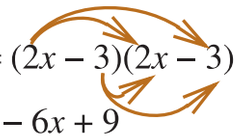
Jokaisella kertojan termillä kerrotaan jokainen kerrottavan termi.

$= 2x \cdot 5x - 2x \cdot 4 - 3 \cdot 5x + 3 \cdot 4$

$= 10x^2 - 8x - 15x + 12$

$= 10x^2 - 23x + 12$

b) $(2x - 3)^2 = (2x - 3)(2x - 3)$ $\qquad a^2 = a \cdot a$



$= 4x^2 - 6x - 6x + 9$

$= 4x^2 - 12x + 9$

VASTAUS a) $10x^2 - 23x + 12$ b) $4x^2 - 12x + 9$

Harjoituksia

52. Laske

a) polynomifunktion $x^2 - x - 14$ arvo muuttujan x arvolla -3

b) polynomifunktion $-x^2 - 2x - 9$ arvo muuttujan arvolla 5.

53. Laske.

a) $(2x^2 - 3x - 9) + (3x^2 - 7x + 2)$

b) $(2a^2 - 3a + 4) - (-3a^2 + 5a - 1)$

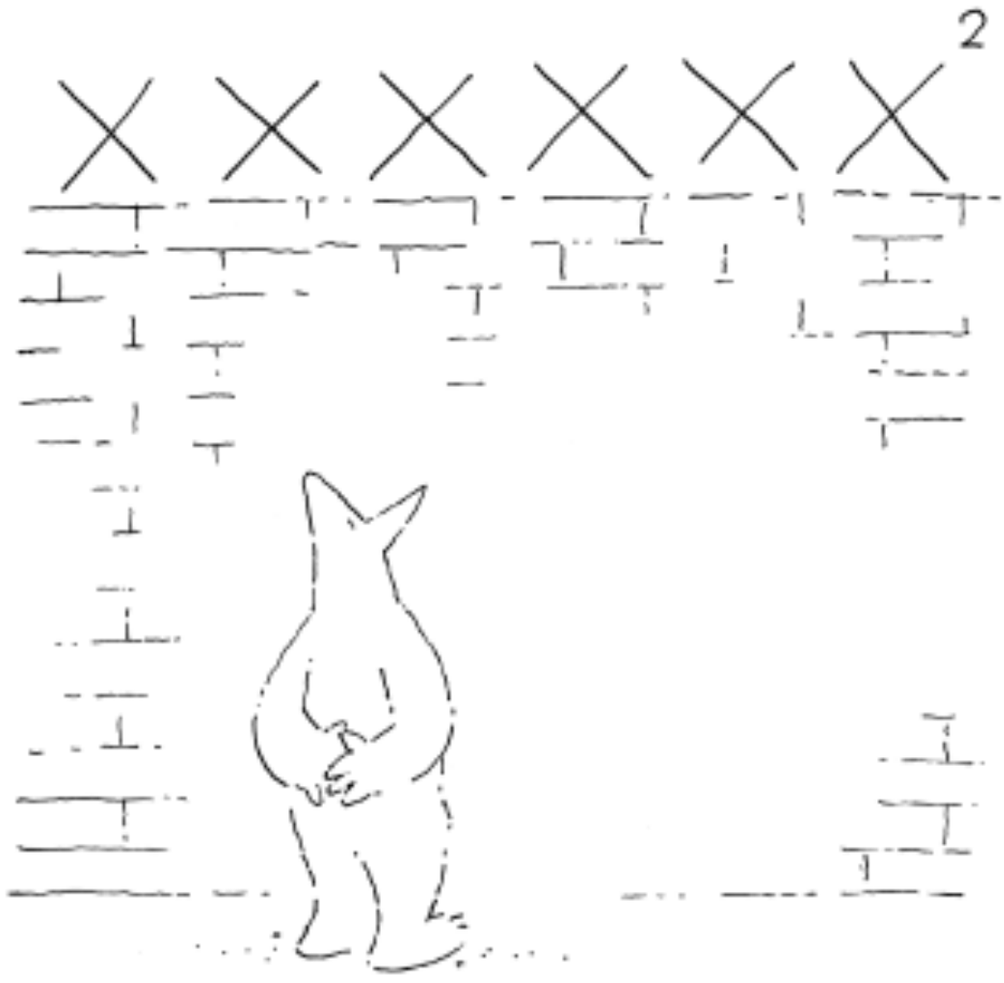
54. Laske polynomien $x^2 - x$ ja $\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x$ erotus.

55. Laske. a) $-3x^2 \cdot (-5x^3)$ b) $-2t(t^2 - 7t)$

56. Laske. a) $2 + 4(x - 5)$ b) $6s - s(s + 4)$ c) $2x - 3(3x - 4)$

57. Laske. a) $(2x - 3)(3x - 4)$ b) $(5x - 4)^2$ c) $x(x + 5)^2$

58. Sievennä lauseke $x(19x - 6) - (x - 3)^2$ ja laske lausekkeen arvo, kun $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$.



Ensimmäisen asteen yhtälö

ESIMERKKI 1 Ratkaise yhtälö $\frac{x}{4} - \frac{x-1}{3} = 1$.

RATKAISU

$\frac{x}{4} - \frac{x-1}{3} = 1 \quad | \cdot 12$ Yhtälö kerrotaan luvulla 12, joka on jaollinen molemmilla nimittäjillä 4 ja 3.

$\frac{\overset{3}{\cancel{12}}x}{\underset{1}{\cancel{4}}} - \frac{\overset{4}{\cancel{12}}(x-1)}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 12$ Supistetaan.

$3x - 4(x-1) = 12$ Poistetaan sulkeet.

$3x - 4x + 4 = 12$

$-x + 4 = 12$

$-x = 8 \quad | \cdot (-1)$

$x = -8$

VASTAUS $x = -8$

ESIMERKKI 2 Lentorahdin perusmaksu on 27 euroa, minkä lisäksi maksetaan 2,45 euroa kilogrammalta painorajaan 30 kg saakka ja 3,65 euroa kilogrammalta painorajan 30 kg ylittävästä painosta. Paketti punnitaan kymmenen gramman tarkkuudella. Paljonko painoi paketti, jonka lentorahti maksoi a) 82,76 euroa b) 194,60 euroa?

RATKAISU Jos paketin paino x on enintään 30 kg, niin maksu euroina on

$27 + 2{,}45x.$ perusmaksu 27 euroa sekä 2,45 euroa jokaisesta kilogrammasta

Jos paketin paino on yli 30 kg, maksu on

$27 + 30 \cdot 2{,}45 + 3{,}65(x - 30)$ maksu 30 kg:sta ja 3,65 euroa jokaisesta painorajan 30 kg ylittävästä kilogrammasta

$= 100{,}50 + 3{,}65(x - 30).$

a) Paketti, jonka rahti maksoi 82,76 euroa, painaa vähemmän kuin 30 kg. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$27 + 2{,}45x = 82{,}76$$

$$2{,}45x = 55{,}76 \qquad \big| : 2{,}45$$

$$x = \frac{55{,}76}{2{,}45} \approx 22{,}76$$

Paketti painaa 22,76 kg.

b) Paketti, jonka rahti maksoi 194,60 euroa, painaa yli 30 kg. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$100{,}50 + 3{,}65(x - 30) = 194{,}60 \qquad \text{Poistetaan sulkeet.}$$

$$100{,}50 + 3{,}65x - 109{,}50 = 194{,}60$$

$$3{,}65x - 9{,}00 = 194{,}60$$

$$3{,}65x = 203{,}60 \qquad \big| : 3{,}65$$

$$x = \frac{203{,}60}{3{,}65} \approx 55{,}78$$

Paketti painaa 55,78 kg.

VASTAUS a) 22,76 kg b) 55,78 kg

Harjoituksia

59. Ratkaise yhtälö.
a) $3(2x + 1) - 4 = 9x$
b) $4 - 2(x - 3) = x + 10$

60. Ratkaise yhtälö. a) $\frac{x}{4} + \frac{4}{6} = \frac{x}{3}$ b) $\frac{x}{3} - \frac{5}{9} = x$

61. Ratkaise yhtälö $(x - 3)^2 = x^2 + x$.

62. Joulumyyjäisten myyntipaikka maksaa 45 euroa ja tonttulakin valmistus 1,35 euroa. Tonttulakit myydään 2,90 eurolla. Kuinka monta tonttulakkia on myytävä, jotta tulot ylittäisivät kulut?

63. Aviopuolisot Taisto ja Irmeli osallistuivat 615 euron suuruisen laskun maksamiseen kuukausipalkkojensa suhteessa. Taiston palkka on 1 801 € ja Irmelin 1 354 €. Mitkä olivat heidän osuutensa laskusta? (Ylioppilaskoe, s. 2002)

64. Seinällä, jonka pituus on 19,72 metriä, on tasavälein kymmenen 119 cm:n levyistä ikkunaa. Laitimmaisten ikkunoiden etäisyys nurkista on 83 cm. Mikä ikkunoiden väli on?

65. Kahden peräkkäisen luonnollisen luvun neliöiden erotus on 17 983. Mitkä nämä luvut ovat?

Verrannollisuus

ESIMERKKI 1 Jos olosuhteet ovat samat, niin auton jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Jarrutusmatka nopeudesta 60 km/h oli 37 metriä. Mikä jarrutusmatka on nopeudesta 95 km/h?

RATKAISU Merkitään tuntematonta jarrutusmatkaa x (m). Kootaan verrannollisten suureiden arvot taulukkoon.

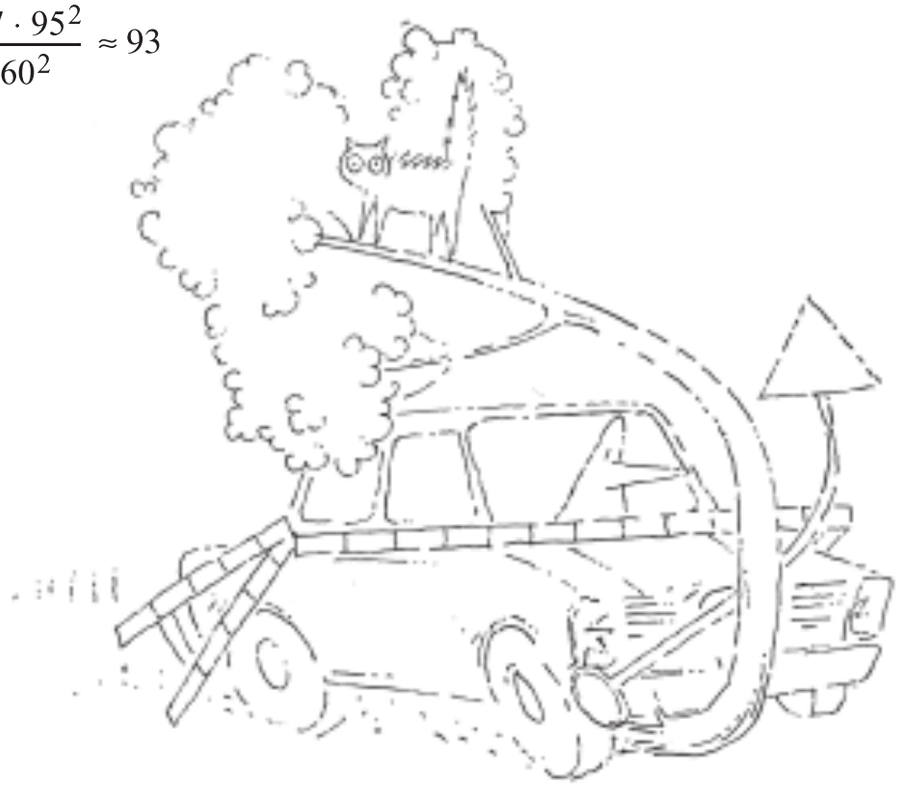
jarrutusmatka	nopeus^2
x	95^2
37	60^2

Koska jarrutusmatka ja nopeuden neliö ovat suoraan verrannolliset, jarrutusmatkojen suhde on yhtä suuri kuin vastaavien nopeuksien neliöiden suhde.

$$\frac{x}{37} = \frac{95^2}{60^2} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$60^2 \cdot x = 37 \cdot 95^2 \qquad \big| : 60^2$$

$$x = \frac{37 \cdot 95^2}{60^2} \approx 93$$



VASTAUS 93 m

ESIMERKKI 2 Valaistus 3,7 metrin etäisyydellä valonlähteestä on 98 luksia. Mikä valaistus on 1,6 metrin etäisyydellä valonlähteestä? Valaistus on käänteen verrannollinen valonlähteen etäisyyden neliöön.

RATKAISU Merkitään tuntematonta valaistusta x. Kootaan verrannollisten suureiden arvot taulukkoon.

valaistus	etäisyys^2
x	$1{,}6^2$
98	$3{,}7^2$

Koska valaistus ja etäisyyden neliö ovat kääntäen verrannolliset, valaistusten suhde on yhtä suuri kuin vastaavien etäisyyksien neliöiden suhteen käänteisluku.

$$\frac{x}{98} = \frac{3{,}7^2}{1{,}6^2}$$ Kerrotaan ristiin.

$$1{,}6^2 \cdot x = 98 \cdot 3{,}7^2 \quad | : 1{,}6^2$$

$$x = \frac{98 \cdot 3{,}7^2}{1{,}6^2} \approx 520$$

VASTAUS 520 luksia

Harjoituksia

66. Matkailija oli ostanut 230 eurolla 19 770 Islannin kruunua. Mikä matkailijan nauttiman, 3 720 kruunua maksaneen, aterian hinta on euroina?

67. Väljä 82 m^2:n kaksio jugendtalossa Helsingin Kruununhaassa maksoi 89 000 markkaa vuonna 1973. Mikä oli vastaava rahamäärä vuoden 2006 rahassa? Elinkustannusindeksi vuonna 1973 oli 284 pistettä ja vuonna 2006 1662 pistettä. Yksi euro on 5,94573 markkaa.

68. Viulun 42,7 cm pitkä kieli värähtelee taajuudella 494 hertsiä (värähdystä sekunnissa). Millä taajuudella kieli värähtelee, kun viulisti sormellaan painaen lyhentää soivan kielen pituudeksi 32,0 cm? Värähtelytaajuus on kääntäen verrannollinen kielen pituuteen.

69. Kuivalla asfaltilla eräs auto pysähtyi hätäjarrutuksessa nopeudesta 90 km/h 52 metrin matkalla. Kuinka pitkä jarrutusmatka tarvitaan pysäyttämään auto nopeudesta 50 km/h? Jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön.

70. Ratkaise yhtälö $\frac{x+2}{x-3} = \frac{x}{x+1}$.

71. Ratkaise

a) yhtälö $3x + 2 = x - 4(5x - 1)$

b) yhtälö $\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = x + 1.$

(Ylioppilaskoe, k. 2005)

72. Ratkaise yhtälö $5(3x + 1) - 4(3 - 2x) = 2x$. Tutki, toteuttaako tämä ratkaisu myös yhtälön $27x^3 - 54x + 17 = 0.$

(Ylioppilaskoe, s. 2003)

73. Eräissä maissa käytetään lämpötilan mittaamisessa fahrenheitasteikkoa. Fahrenheitmittarin lukema f muunnetaan kaavalla $c = \frac{5}{9}(f - 32)$ celsiusmittarin lukemaksi.

Kuinka korkea kuume ihmisellä on fahrenheitasteina, jos lukema celsiusasteina on 38,2? Missä lämpötilassa celsiusmittari ja fahrenheitmittari osoittavat samaa lukemaa? (Ylioppilaskoe, s. 2001)

74. Kappaleen paino on kääntäen verrannollinen maapallon keskipisteestä mitatun etäisyyden neliöön. Lentokone painaa maan pinnalla 56,0 tonnia. Kuinka paljon se painaa kymmenen kilometrin korkeudessa? Maan pinnan etäisyys keskipisteestä on 6 370 kilometriä. (Ylioppilaskoe, k. 2006)

75. Täysmaidon rasvapitoisuus on 3,5 % ja ykkösmaidon 1,0 %. Kuinka paljon ykkösmaitoa on lisättävä 0,5 kilogrammaan täysmaitoa, jotta saataisiin maitoa, jonka rasvapitoisuus on sama kuin kevytmaidon eli 2,0 %?

76. Pekka kävelee neljä kilometriä tunnissa ja hölkkää kuusi kilometriä tunnissa. Hölkätessään kouluun hän käyttää 3 min 45 s vähemmän aikaa kuin kävellessään sinne. Määritä Pekan koulumatkan pituus.

(Ylioppilaskoe, k. 1998)

77. Pendolino lähtee Tikkurilasta kello 6.49 ja ajaa pysähtymättä Tampereelle keskinopeudella 153 km/h. Tampereelta lähtee tavarajuna kohti Tikkurilaa kello 7.03 nopeudella 95 km/h. Tikkurilan ja Tampereen välisen rataosuuden pituus on 171 km. Mikä junien ennakoitu kohtaamisaika on? Anna vastaus minuutin tarkkuudella.

78. Kuivalla asfaltilla eräs auto pysähtyi hätäjarrutuksessa nopeudesta 90 km/h 57 metrin matkalla. Kuinka pitkä matka tarvitaan hiljentämään auto nopeudesta 120 km/h nopeuteen 40 km/h? Jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön.

79. Annen kuukausipalkasta pidätetään veroennakkoa 26,0 % siitä palkan osasta, joka ei ylitä verokorttiin merkittyä tulorajaa, ja 29,5 % tulorajan ylittävästä palkan osasta. Palkasta, jonka suuruus oli 3 891,56 euroa, jäi ennakonpidätyksen jälkeen maksettavaksi 2 857,12 euroa. Mikä verokorttiin merkitty tuloraja on?

80. Henkilön palkasta jäi ennakonpidätyksen jälkeen käteen 73 %. Vuodenvaihteessa henkilö sai 45 euron palkankorotuksen. Samanaikaisesti ennakonpidätys laski 0,8 prosenttiyksikköä. Henkilölle jäi ennakonpidätyksen jälkeen käteen nyt 49,60 euroa enemmän kuin ennen muutoksia. Mikä oli henkilön uusi ennakonpidätysprosentti ja mikä oli hänen uusi palkkansa? (Ylioppilaskoe, k. 2005)

81. Pientalossa asuva on nykyisin asiakkaana sähköyhtiössä A, josta ostetun sähkön hinta muodostuu perusmaksusta 2,98 €/kk ja kulutusmaksusta 5,51 snt/kWh. Hän saa yhtiöltä B hintatarjouksen 3,50 €/kk ja 5,45 snt/kWh. Mikä tulee vuotuisen kulutuksen olla, jotta hänen kannattaisi vaihtaa sähkötoimittajaa? Mikä tulee vuotuisen kulutuksen olla, jotta hän yhtiötä vaihtamalla säästäisi vähintään 10 euroa vuodessa?

82. Metsänomistaja teetti metsätöitä urakoitsijalla ja sopi alustavasti työn hinnaksi kuitupuun osalta 14 €/m^3 ja tukkipuun osalta 9,2 €/m^3. Kuitupuuta kertyi 156 m^3 ja tukkipuuta 89,4 m^3. Alustaviin hintoihin ei kuitenkaan sisältynyt arvonlisäveroa, vaikka metsänomistaja oli näin ymmärtänyt. Keskustelujen jälkeen osapuolet päätyivät sopimukseen, jonka mukaan urakoitsija alentaa ilmoittamiaan verottomia hintoja siten, että koko urakan osalta metsänomistajalle koituva lisämaksu tulee yhtä suureksi kuin urakoitsijan antama alennus. Kuinka paljon metsänomistaja maksoi teettämästään työstä arvonlisäveroineen? Arvonlisäveron suuruus on 22 % työn verottomasta hinnasta.
(Ylioppilaskoe, s. 2004.)

83. Ohessa on valtion tuloveroasteikko vuodelta 2007.
a) Kuinka paljon valtion tuloveroa vuonna 2007 maksoi henkilö, jonka verotettava vuositulo oli 29 758,61 euroa?
b) Kuinka suuri olisi henkilön verotettava vuositulo ollut, jos hänelle valtion tuloveron pidätyksen jälkeen olisi jäänyt 51 709,90 euroa?

Verotettava ansiotulo euroa	Vero alarajalla euroa	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta %
12 400–20 400	8	9,0
20 400–33 400	728	19,5
33 400–60 800	3 263	24,0
60 800–	9 839	32,0

Neliöjuuri ja toisen asteen yhtälö

1. Ratkaise yhtälö $x^2 = 10$.

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisukaava

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. a) Määritä funktion $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ nollakohdat.

b) Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ arvot ovat positiivisia?

3. Ratkaise yhtälö $3x^2 - 27 = 0$.

Tehtävien vastaukset ovat seuraavalla sivulla.

Neliöjuuri

Neliöjuuren määritelmä

Luvun a neliöjuuri $\sqrt{a}$ on luku, joka on positiivinen tai nolla ja jonka neliö on a. Siis

$\sqrt{a} \geqslant 0$ ja $(\sqrt{a})^2 = a$.

Koska luvun neliö on aina positiivinen tai nolla, niin vain positiivisilla luvuilla ja luvulla nolla on neliöjuuri. Negatiivisilla luvuilla ei ole neliöjuurta.

ESIMERKKI 1 Laske funktion $f(x) = 6x^2$ arvo $f(\frac{\sqrt{5}}{3})$.

RATKAISU Sijoitetaan funktion lausekkeeseen $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$f(\frac{\sqrt{5}}{3}) = 6\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$= 6 \cdot \frac{(\sqrt{5})^2}{3^2} \qquad (\sqrt{a})^2 = a$$

$$= 6 \cdot \frac{5}{9} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}} \cdot 5}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3}$$

VASTAUS $\frac{10}{3}$

TAIDANKO? VASTAUKSET

1. $x = \sqrt{10}$ tai $x = -\sqrt{10}$

2. a) $\frac{1}{3}$ ja -1 b) $x < -1$ tai $x > \frac{1}{3}$

3. $x = 3$ tai $x = -3$

Neliöyhtälö

Yhtälöllä $x^2 = r$ on luvun r merkistä riippuen kaksi, yksi tai ei yhtään juurta.

- Jos $r > 0$, niin yhtälöllä $x^2 = r$ on kaksi juurta.

$x^2 = r$ — Yhtälön juuret ovat luvun r neliöjuuri ja neliöjuuren vastaluku.

$x = \sqrt{r}$ tai $x = -\sqrt{r}$

- Yhtälöllä $x^2 = 0$ on yksi juuri.

$x^2 = 0$
$x = 0$

- Jos $r < 0$, niin yhtälöllä $x^2 = r$ ei ole juuria.

ESIMERKKI 2 Ratkaise yhtälö.

a) $3x^2 - 45 = 0$ b) $4x^2 = x^2$ c) $x^2 + 3 = 0$

RATKAISU

a) $3x^2 - 45 = 0$ — Yhtälöstä ratkaistaan ensin x^2.

$x^2 = 15$ — Yhtälön toteuttavat luvun 15 neliöjuuri ja neliöjuuren vastaluku.

$x = \sqrt{15}$ tai $x = -\sqrt{15}$ — Vastaukseksi annetaan tarkat arvot (ei likiarvoja).

b) $4x^2 = x^2 \quad | -x^2$ — Yhtälöstä ratkaistaan ensin x^2.

$3x^2 = 0 \quad | : 3$

$x^2 = 0$ — Yhtälön ainoa juuri on luku 0.

$x = 0$

c) $x^2 + 3 = 0$ — Yhtälöstä ratkaistaan ensin x^2.

$x^2 = -3$ — Luvun neliö ei koskaan ole negatiivinen.

Ei juuria.

VASTAUS a) $x = \sqrt{15}$ tai $x = -\sqrt{15}$ b) $x = 0$ c) Ei juuria.

ESIMERKKI 3 Ympyrän pinta-ala on $128\ \text{m}^2$. Kuinka pitkä ympyrän säde on?

RATKAISU Jos ympyrän säde on r, niin ympyrän pinta-ala on $A = \pi r^2$.

$\pi r^2 = 128 \quad | : \pi$ Yhtälöstä ratkaistaan ensin r^2.

$$r^2 = \frac{128}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{128}{\pi}} \approx 6{,}38 \text{ tai } r = -\sqrt{\frac{128}{\pi}} \approx -6{,}38$$

Vain positiivinen juuri $\sqrt{\frac{128}{\pi}} \approx 6{,}38$ (m) kelpaa ympyrän säteeksi.

VASTAUS $6{,}38\ \text{m}^*$

Harjoituksia

84. Laske a) lausekkeen $(3x)^2$ tarkka arvo, kun $x = \frac{1}{\sqrt{7}}$

b) lausekkeen $1 - 4x^2$ tarkka arvo, kun $x = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

85. Laske erotuksen $\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{4}{9}}$ tarkka arvo.

86. Ratkaise yhtälö.

a) $2x^2 - 26 = 0$ b) $49x^2 = 1$ c) $9x^2 + 1 = 0$ d) $2x^2 = 5x^2$

87. Olkoot a ja b kaksi positiivista lukua. Positiivista lukua c, jolle pätee $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, kutsutaan lukujen a ja b keskiverroksi. Määritä lukujen 2 ja 5 keskiverto.

88. Kuinka pitkä neliön muotoisen peltoalueen sivu on, jos alueen pinta-ala on a) 7,2 aaria b) 13 hehtaaria?

---

* Koska lähtötieto $128\ \text{m}^2$ on annettu kolmen numeron tarkkuudella, myös vastaus annetaan kolmen numeron tarkkuudella.

Toisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

Toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaistaan ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Yhtälöllä on neliöjuuren alle tulevan luvun $b^2 - 4ac$ merkistä riippuen kaksi, yksi tai ei yhtään juurta.

ESIMERKKI 1 Ratkaise yhtälö $x(3x - 1) = 2$.

RATKAISU

$x(3x - 1) = 2$ Yhtälö saatetaan muotoon $ax^2 + bx + c = 0$.

$3x^2 - x = 2 \quad | -2$

$3x^2 - x - 2 = 0$ Yhtälön kertoimet ovat $a = 3$, $b = -1$ ja $c = -2$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Ratkaisukaavaan sijoitetaan $a = 3$, $b = -1$ ja $c = -2$.

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6}$$

$$x = \frac{1 + 5}{6} = \frac{6}{6} = 1 \text{ tai } x = \frac{1 - 5}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

VASTAUS $x = 1$ tai $x = -\frac{2}{3}$

ESIMERKKI 2 Ratkaise yhtälö $3x^2 = -x$.

RATKAISU *Tapa 1.* Käytetään ratkaisukaavaa.

$3x^2 = -x$ — Yhtälö saatetaan muotoon $ax^2 + bx + c = 0$.

$3x^2 + x = 0$ — Yhtälön kertoimet ovat $a = 3$, $b = 1$ ja $c = 0$.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — Ratkaisukaavaan sijoitetaan $a = 3$, $b = 1$ ja $c = 0$.

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{6}$$

$$= \frac{-1 \pm 1}{6}$$

$$x = \frac{-1 + 1}{6} = \frac{0}{6} = 0 \text{ tai } x = \frac{-1 - 1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Tapa 2. Yhtälöstä $3x^2 = -x$ puuttuu vakiotermi. Yhtälö voidaan ratkaista käyttämällä tulon nollasääntöä.

$3x^2 = -x$ — Yhtälö saatetaan muotoon $ax^2 + bx + c = 0$.

$3x^2 + x = 0$ — Erotetaan termien yhteinen tekijä x.

$x(3x + 1) = 0$ — Tulon nollasääntö: Tulo on nolla, kun jokin tulon tekijöistä on nolla.

$x = 0$ tai $3x + 1 = 0$ — Ratkaistaan yhtälö $3x + 1 = 0$.

$x = 0$ tai $3x = -1$

$x = 0$ tai $x = -\dfrac{1}{3}$

VASTAUS $x = 0$ tai $x = -\dfrac{1}{3}$

ESIMERKKI 3 Ratkaise yhtälö $4x^2 - 9 = 0$.

RATKAISU *Tapa 1.* Yhtälöstä $4x^2 - 9 = 0$ puuttuu ensimmäisen asteen termi. Yhtälö voidaan ratkaista niin, että ensin ratkaistaan x^2.

$4x^2 - 9 = 0$ Ratkaistaan x^2.

$4x^2 = 9$ $\mid : 4$

$x^2 = \frac{9}{4}$ Yhtälön juuret ovat luvun $\frac{9}{4}$ neliöjuuri ja sen vastaluku.

$x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ tai $x = -\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{3}{2}$ $\qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Tapa 2. Käytetään ratkaisukaavaa.

$4x^2 - 9 = 0$ Yhtälön kertoimet ovat $a = 4$, $b = 0$ ja $c = -9$.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Ratkaisukaavaan sijoitetaan $a = 4$, $b = 0$ ja $c = -9$.

$= \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9)}}{2 \cdot 4}$

$= \frac{0 \pm \sqrt{144}}{8} = \pm\frac{\sqrt{144}}{8}$

$= \pm\frac{12}{8} = \pm\frac{3}{2}$

$x = \frac{3}{2}$ tai $x = -\frac{3}{2}$

VASTAUS $x = \frac{3}{2}$ tai $x = -\frac{3}{2}$

Toisen asteen yhtälön yksinkertaistaminen

Ennen ratkaisukaavan soveltamista toisen asteen yhtälöä voi joskus yksinkertaistaa seuraavin keinoin:

- Toisen asteen termin kerroin muutetaan positiiviseksi kertomalla yhtälö luvulla -1. Tällöin ratkaisukaavaa sovellettaessa juurten nimittäjään tulee positiivinen luku ja juurten sieventäminen on yksinkertaisempaa.

$$-x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad \big| \cdot (-1)$$

$$x^2 + 4x - 3 = 0$$

- Nimittäjät kerrotaan pois.

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0 \qquad \big| \cdot 6$$

Luku 6 on jaollinen molemmilla nimittäjillä 3 ja 2.

$$\frac{\overset{2}{\cancel{6}} \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{3}}}x^2 - \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}x - 6 = 0$$

$$4x^2 - 3x - 6 = 0$$

- Yhtälö jaetaan termien yhteisellä tekijällä.

$$2000x^2 + 6000x - 5000 = 0 \qquad \big| : 1000$$

$$2x^2 + 6x - 5 = 0$$

Harjoituksia

89. Ratkaise yhtälö.
a) $x(x + 1) = 6$ b) $1 - x^2 = x^2 + x$

90. Ratkaise yhtälö $(12x - 1)x = 6$.

91. Ratkaise yhtälö.
a) $x^2 = 3x$ b) $(x - 3)(2x + 1) = 0$

92. Ratkaise yhtälö $(x - 3)(x + 3) = -7$.

93. Ratkaise yhtälö. a) $x(3 - x) = 0$ b) $x(3 - x) = 1$

94. Määritä funktion $f(x) = x^2 - 6x + 10$ nollakohdat. Millä muuttujan arvoilla funktion f arvo on 1?

Funktion arvojen merkki

Kuvaaja ja funktion arvojen merkki

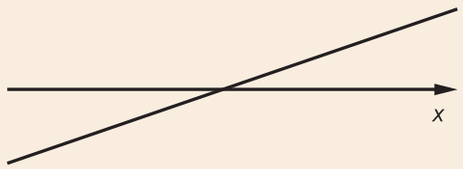
Funktion arvojen merkit voidaan päätellä funktion kuvaajasta.

Funktion arvojen merkki voi vaihtua vain funktion nollakohdissa, ja

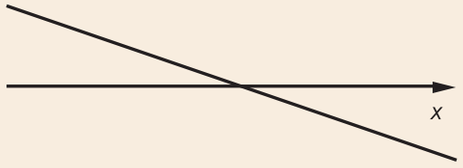
- funktion arvot ovat positiivisia niillä muuttujan arvoilla, joiden kohdalla funktion kuvaaja on x-akselin yläpuolella
- funktion arvot ovat negatiivisia niillä muuttujan arvoilla, joiden kohdalla funktion kuvaaja on x-akselin alapuolella.

Ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaaja

Ensimmäisen asteen polynomifunktion $ax + b$, missä $a \neq 0$, kuvaaja on suora $y = ax + b$. Suora on



nouseva, jos $a > 0$



laskeva, jos $a < 0$.

ESIMERKKI 1 Millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = -3x + 2$ arvot ovat positiivisia?

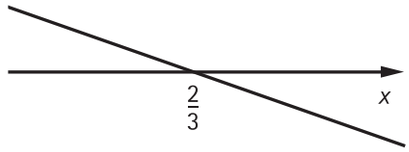
RATKAISU Ratkaistaan funktion $f(x) = -3x + 2$ nollakohta.

$$-3x + 2 = 0$$

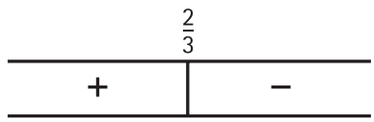
$$-3x = -2 \qquad \big| : (-3)$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Funktion $f(x) = -3x + 2$ kuvaaja on laskeva suora.



Laaditaan funktion f merkkikaavio.

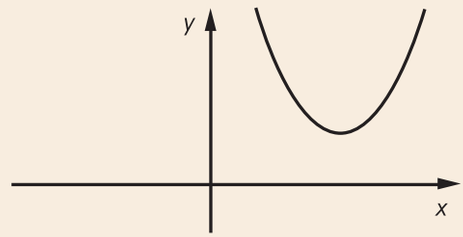


Funktion f arvot ovat positiivisia, kun $x < \frac{2}{3}$.

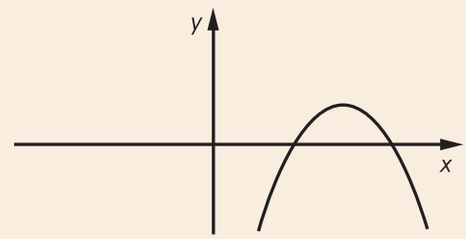
VASTAUS $x < \frac{2}{3}$

Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja

Toisen asteen polynomifunktion $ax^2 + bx + c$, missä $a \neq 0$, kuvaaja on paraabeli $y = ax^2 + bx + c$. Paraabelin aukeamissuunnan määrää toisen asteen termin ax^2 kertoimen a merkki. Paraabeli aukeaa



ylöspäin, jos $a > 0$



alaspäin, jos $a < 0$.

ESIMERKKI 2 Millä muuttujan arvoilla funktion $-x^2 + 5x + 14$ arvot ovat positiivisia?

RATKAISU Ratkaistaan funktion $-x^2 + 5x + 14$ nollakohdat.

$$-x^2 + 5x + 14 = 0 \qquad | \cdot (-1)$$

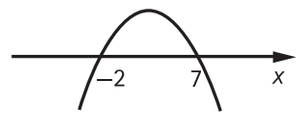
$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2}$$

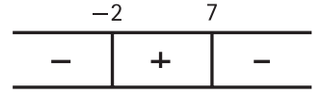
$$= \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2}$$

$$x = \frac{5 + 9}{2} = 7 \text{ tai } x = \frac{5 - 9}{2} = -2$$

Funktion $-x^2 + 5x + 14$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Laaditaan funktion $-x^2 + 5x + 14$ merkkikaavio.



Merkkikaavion mukaan funktion $-x^2 + 5x + 14$ arvot ovat positiivisia, kun muuttujan x arvot ovat arvojen -2 ja 7 välissä eli kun $-2 < x < 7$.

VASTAUS $-2 < x < 7$

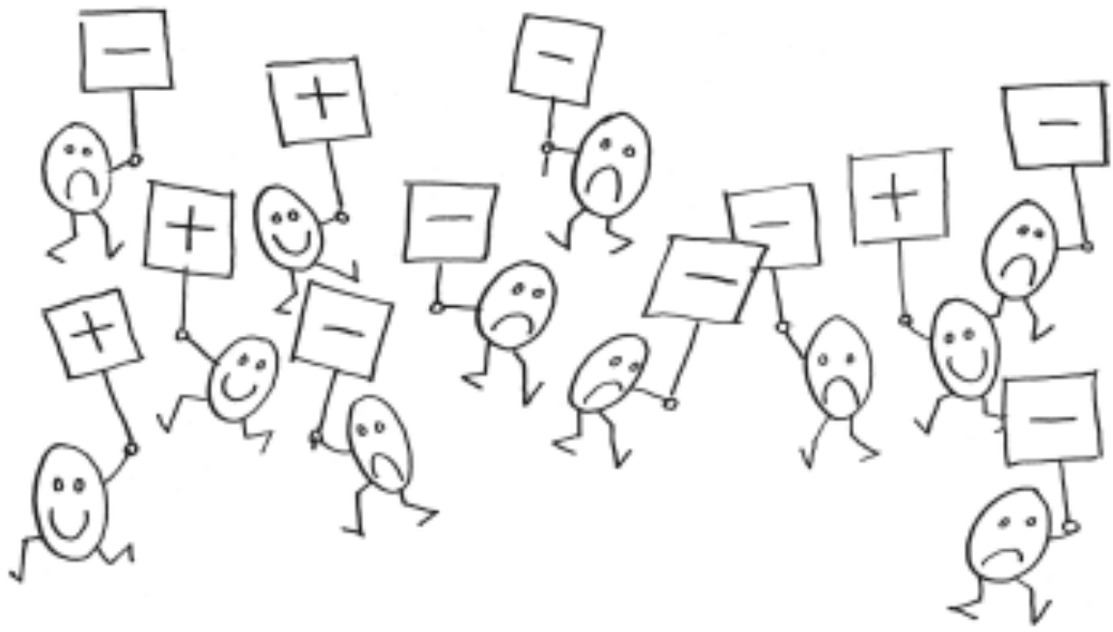
Harjoituksia

95. Millä muuttujan arvoilla lauseke $2x + 6$ saa positiivisia arvoja?

96. Millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = 1 - 6x$ arvot ovat negatiivisia?

97. Millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ arvot ovat negatiivisia?

98. Millä muuttujan arvoilla lausekkeen $9 - x^2$ arvot ovat negatiivisia?



99. Ratkaise yhtälö $\frac{2x}{2x+3} = \frac{2x+1}{8}$.

(Ylioppilaskoe, k. 2000)

100. Määritä yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ ne ratkaisut, jotka ovat välillä $-1 < x < \frac{3}{2}$.

101. Ratkaise yhtälö $x(x - \frac{7}{10}) = \frac{1}{10} - x$.

(Ylioppilaskoe, k. 2001)

102. Olkoon $f(x) = x^2 - 3{,}1x - 1{,}4$. Laske funktion f nollakohdat ja tutki, millä välillä se saa negatiivisia arvoja.
(Ylioppilaskoe, s. 2004)

103. Laske paraabelien $y = 5x^2 - x$ ja $y = 1 - x^2$ leikkauspisteet.
(Ylioppilaskoe, s. 2002)

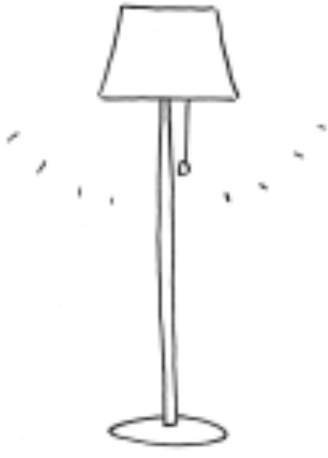
104. Valaistus 3,7 metrin etäisyydellä lampusta on 88 luksia. Lukemiseen suositeltava valaistus on vähintään 300 luksia. Kuinka lähellä lamppua valaistus on suosituksen mukainen? Valaistus on kääntäen verrannollinen valonlähteen etäisyyden neliöön.

105. Painoindeksi on yleisesti käytetty yli- ja alipainon mittari. Painoindeksi lasketaan jakamalla paino (kilogrammoina) pituuden neliöllä (metreinä). Ihminen on normaalipainoinen, jos hänen painoindeksinsä on välillä 20–25.
a) Mitkä ovat 173 cm pitkän henkilön normaalipainon rajat?
b) Kuinka pitkä 52 kilon painoinen henkilö ei ole alipainoinen, ja kuinka pitkä 95 kilon painoinen henkilö ei ole ylipainoinen?

106. Suorakulmion piiri on 17,0 metriä ja ala 17,5 neliömetriä. Määritä suorakulmion sivujen pituudet. (Ylioppilaskoe, s. 2005)

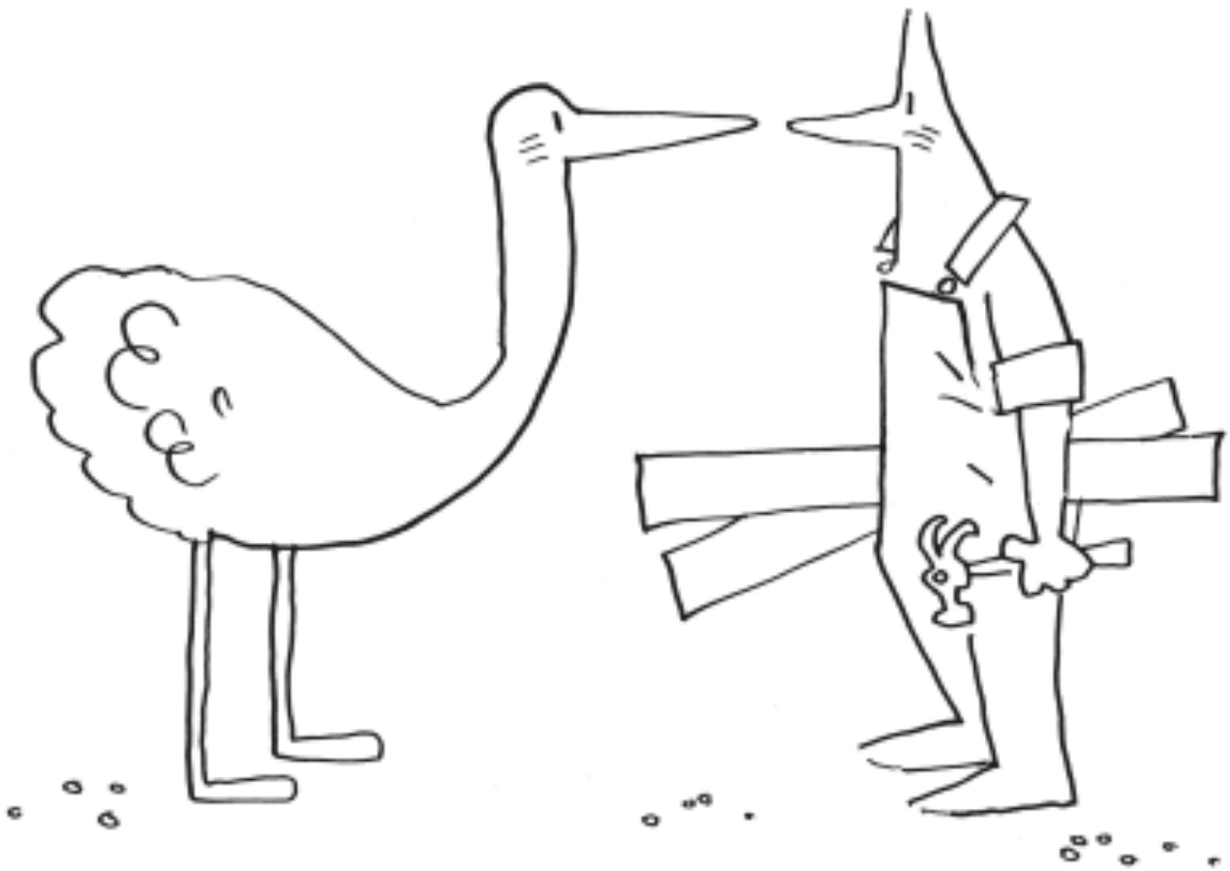
107. Neljä neliön muotoista laattaa, joiden sivun pituus on 15,0 cm, asetetaan neliönmuotoiseksi ruudukoksi niin, että laattojen väliin jää yhtä leveät raidat, jotka muodostavat ristin muotoisen kuvion. Mikä on raidan leveys silloin, kun ristin pinta-ala on sama kuin neljän laatan yhteen laskettu pinta-ala?
(Ylioppilaskoe, s. 1999)

108. Saarella, jonka pinta-ala on 3,00 ha, on kahden talon välinen etäisyys 200 m. Voiko saari olla ympyrän muotoinen?
(Ylioppilaskoe, s. 1988)



109. Strutsien kasvattaja haluaa tilapäisesti vuokrata eläinten jaloitteluun peltoa. Pellosta pyydetään vuokraa 128 € hehtaarilta. Alue tulee lisäksi aidata, ja aitakustannukset ovat 0,20 € aitametriltä. Strutsifarmari on varannut tarkoitukseen 550 euroa. Kuinka suuren aidalla ympäröitävän neliön muotoisen peltoalan hän pystyy vuokraamaan?
(Ylioppilaskoe, s. 2004)

110. Tilille sijoitettiin ensimmäisen vuoden alussa 5 000 € ja toisen vuoden alussa 4 500 €. Kolmannen vuoden alkaessa tilin saldo oli 9 894,85 €. Mikä on tilin korkokanta, kun korko lisättiin pääomaan vuosittain vuoden lopussa ja koroista perittiin vuosittain lähdeveroa 29 %? Tilillä ei kyseisenä aikana ollut muita tilitapahtumia.
(Ylioppilaskoe, s. 2003)



Potenssi ja eksponenttifunktio

1. Sievennä lauseke.

a) $3x^5 \cdot 5x^3$ b) $\dfrac{x^8}{x^4}$ c) $(3x^3)^2$

2. Kirjoita luvut kymmenpotenssimuodossa.

a) 54 000 000 b) 0,000 017

3. Maapallon pinta-ala $5{,}1 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2$ jaetaan tasan maapallon 6,6 miljardin asukkaan kesken. Kuinka paljon kukin saa?

4. Ratkaise yhtälö.

a) $2^x = 64$ b) $x^4 = 625$

5. Ratkaise yhtälö kahden desimaalin tarkkuudella.

a) $5^x = 15$ b) $x^7 = 700\,000$

Tehtävien vastaukset ovat seuraavalla sivulla.

Potenssi

Potenssi, jonka eksponentti on positiivinen kokonaisluku

Potenssimerkinnässä a^n luku a on *kantaluku* ja luku n on *eksponentti*.

Potenssi, jonka eksponentti on positiivinen kokonaisluku, on tulo:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kappaletta}}.$$

Miinusmerkkinen kantaluku merkitään sulkeisiin. Potenssin arvon merkki riippuu siitä, onko eksponentti pariton vai parillinen.

$(-3)^7 = -2\,187$ Eksponentti on pariton.

$(-3)^{10} = 59\,049$ Eksponentti on parillinen.

ESIMERKKI 1 Nigerian väkiluku vuonna 2005 oli 129 miljoonaa, ja väkiluvun vuotuinen kasvu oli 2,4 %. Mikä Nigerian väkiluku on vuonna 2025, jos kasvu jatkuu yhtä nopeana?

RATKAISU Koska $100\,\% + 2{,}4\,\% = 102{,}4\,\%$, väkiluku tulee joka vuosi 1,024-kertaiseksi.

Vuoden kuluttua väkiluku miljoonina on $1{,}024 \cdot 129$, kahden vuoden kuluttua $1{,}024 \cdot 1{,}024 \cdot 129 = 1{,}024^2 \cdot 129$ ja niin edelleen.

Kun vuodesta 2005 on kulunut 20 vuotta, väkiluku miljoonina on

$1{,}024^{20} \cdot 129 \approx 210$.

VASTAUS 210 miljoonaa

TAIDANKO? VASTAUKSET

1. a) $15x^8$ b) x^4 c) $9x^6$ **2.** a) $5{,}4 \cdot 10^7$ b) $1{,}7 \cdot 10^{-5}$ **3.** 77 000 m^2

4. a) $x = 6$ b) $x = 5$ tai $x = -5$ **5.** a) $x \approx 1{,}68$ b) $x \approx 6{,}84$

Potenssilausekkeen sieventäminen

Potenssilausekkeita voidaan sieventää niin, että potenssit puretaan ensin tuloiksi potenssin määritelmän mukaisesti ja sitten käytetään lukujen kertolaskun ominaisuuksia.

Potenssilausekkeita voidaan sieventää myös käyttämällä potenssikaavoja.

Saman kantaluvun potenssien tulo ja osamäärä

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Saman kantaluvun potenssien tulo on yhtä suuri kuin saman kantaluvun potenssi, jonka eksponentti on eksponenttien summa.

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Saman kantaluvun potenssien osamäärä on yhtä suuri kuin saman kantaluvun potenssi, jonka eksponentti on eksponenttien erotus.

Potenssin potenssi

$(a^m)^n = a^{mn}$

Kun potenssi korotetaan potenssiin, niin eksponentiksi tulee eksponenttien tulo.

Tulon potenssi ja osamäärän potenssi

$(ab)^n = a^n b^n$

Tulon potenssi on tekijöiden potenssien tulo.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Osamäärän potenssi on potenssien osamäärä.

Potenssikaavat ovat taulukkokirjoissa.

ESIMERKKI 2 Sievennä lauseke $\dfrac{(2x^2)^3}{x^4}$.

RATKAISU *Tapa 1.* Käytetään potenssin määritelmää.

$$\frac{(2x^2)^3}{x^4} = \frac{2x^2 \cdot 2x^2 \cdot 2x^2}{xxxx} = \frac{2xx \cdot 2xx \cdot 2xx}{xxxx}$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot xx\cancel{xxxx}}{\cancel{xxxx}} = 8xx = 8x^2$$

Tapa 2. Käytetään potenssikaavoja.

$$\frac{(2x^2)^3}{x^4} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$$= \frac{2^3 \cdot (x^2)^3}{x^4} \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$= \frac{8x^{2 \cdot 3}}{x^4} = \frac{8x^6}{x^4} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$= 8x^{6-4} = 8x^2$$

VASTAUS $8x^2$

Potenssi, jonka eksponentti on nolla tai negatiivinen kokonaisluku

Oletetaan, että kantaluku a on eri suuri kuin nolla ($a \neq 0$). Tällöin:

$a^0 = 1$ Kun eksponentti on 0, potenssin arvo on 1.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. potenssin a^n käänteisluku

Esimerkiksi on $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$.

Erityisesti on

$a^{-1} = \frac{1}{a}$. luvun a käänteisluku

ESIMERKKI 3 Laske lausekkeen $x^1 + 2x^0 + 3x^{-1} + 4x^{-2}$ arvo, kun $x = 3$.

RATKAISU Sijoitetaan $x = 3$.

$3^1 + 2 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^{-1} + 4 \cdot 3^{-2}$ $a^1 = a,\ a^0 = 1,\ a^{-1} = \frac{1}{a},\ a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

$= 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3^2}$

$= 3 + 2 + 1 + \frac{4}{9} = 6\frac{4}{9}$

VASTAUS $6\frac{4}{9}$

Kymmenpotenssimuoto

Suuret ja pienet luvut ilmaistaan usein luvun 10 potenssin avulla.

$$4{,}2 \cdot 10^{11} = 4{,}2 \cdot \underbrace{100\,000\,000\,000}_{\text{11 nollaa}} = 420\,000\,000\,000$$

sata miljardia

$$3 \cdot 10^{-11} = 3 \cdot \frac{1}{10^{11}} = 3 \cdot \underbrace{0{,}000\,000\,000\,01}_{\text{11 nollaa}} = 0{,}000\,000\,000\,03$$

yksi sadasmiljardisosa

Laskimet esittävät kymmenpotenssimuodossa luvut, jotka ovat liian pitkiä mahtuakseen kokonaan laskimen näyttöön.

Lausekkeen 200^6 arvo tulee laskimen näyttöön muodossa 6.4 13 tai 6.4 E13, mikä tarkoittaa lukua

$$6{,}4 \cdot 10^{13} = 6{,}4 \cdot 10\,000\,000\,000\,000 = 64\,000\,000\,000\,000$$

eli lukua 64 biljoonaa.

Laskimeen voi syöttää lukuja kymmenpotenssimuodossa käyttämällä laskimen näppäintä EE tai Exp tai muuta vastaavaa näppäintä.

Luku $4{,}2 \cdot 10^{11}$ syötetään 4.2 EE 11.

Luku $3 \cdot 10^{-11}$ syötetään laskimesta riippuen

3 EE − 11 tai 3 EE 11 +/−.

ESIMERKKI 4 Laske kolmen numeron tarkkuudella potenssin 5^{140} arvo. Kuinka monta numeroa kokonaisluvussa 5^{140} on?

RATKAISU Laskin ilmaisee potenssin 5^{140} arvon kymmenpotenssimuodossa.

Kolmen numeron tarkkuudella on

$5^{140} \approx 7{,}17 \cdot 10^{97}$.

Luku 5^{140} on yhtä pitkä kuin luku $10^{97} = 1000 \ldots 000$, jossa ykkösen jälkeen on 97 nollaa. Luvussa on 98 numeroa.

VASTAUS $7{,}17 \cdot 10^{97}$, 98 numeroa

Harjoituksia

111. Taajaman väkiluku on 8 300, ja väkiluvun ennakoidaan kasvavan 3,4 % vuodessa. Kuinka suuri väkiluku on 12 vuoden kuluttua?

112. Sievennä lauseke. a) $-x^6 - (-2x^2)^3$ b) $(-4x^6)^3 + (-5x^9)^2$

113. Sievennä lauseke $\dfrac{(7x^3)^4}{(7x)^6 x^2}$ ja laske lausekkeen tarkka arvo, kun $x = \sqrt{3}$.

114. Laske lausekkeen $x^0 - 2x^{-1} - 3x^{-2}$ arvo, kun $x = 6$.

115. Alkuluvut ovat ykköstä suurempia kokonaislukuja, jotka ovat jaollisia vain itsellään ja luvulla yksi. Vuonna 1951 löydettiin siihen mennessä suurin alkuluku $\dfrac{2^{148} + 1}{17}$. Mitkä ovat tämän alkuluvun viisi ensimmäistä numeroa? Kuinka monta numeroa luvussa on?

116. Elektronin massa on $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg ja protonin massa $1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg. Kumman alkeishiukkasen massa on pienempi? Kuinka monta prosenttia kevyemmän hiukkasen massa on raskaamman hiukkasen massasta?

Eksponenttifunktio

Eksponenttifunktion määritelmä

Oletetaan, että kantaluku k on positiivinen. Tällöin potenssin k^x arvo voidaan laskea kaikilla muuttujan x arvoilla.

Funktiota $f(x) = k^x$, missä $k > 0$, sanotaan *eksponenttifunktioksi.*

ESIMERKKI 1 Bakteerien lukumäärä ravintoliuoksessa 1,9-kertaistuu joka tunti. Bakteerien lukumäärä on nyt 12 000. Muodosta funktio, joka ilmaisee bakteerien lukumäärän x tunnin kuluttua. Mikä bakteerien lukumäärä on 1,5 tunnin kuluttua? Mikä bakteerien lukumäärä oli puoli tuntia sitten?

RATKAISU

Bakteerien lukumäärä tulee joka tunti 1,9-kertaiseksi.
x tunnin kuluttua bakteerien lukumäärä on

$1{,}9^x \cdot 12\,000.$

Hetkeä 1,5 tunnin kuluttua vastaa eksponentin arvo $x = 1{,}5$.

$1{,}9^{1{,}5} \cdot 12\,000 \approx 31\,000$

Hetkeä ”puoli tuntia sitten” vastaa eksponentin negatiivinen arvo $x = -0{,}5$.

$1{,}9^{-0{,}5} \cdot 12\,000 \approx 8\,700$

VASTAUS funktio $1{,}9^x \cdot 12\,000$, 1,5 tunnin kuluttua 31 000 bakteeria, puoli tuntia sitten 8 700 bakteeria

ESIMERKKI 2 Lasi, jonka paksuus on 1,0 cm, päästää lävitseen 75 % valosta. Kuinka monta prosenttia valosta läpäisee lasin, jonka paksuus on 0,43 cm?

RATKAISU Olkoon valon alkuperäinen määrä a.

Jokainen senttimetrin paksuinen kerros lasia 0,75-kertaistaa siihen tulevan valon määrän. Kun valo on läpäissyt x senttimetrin paksuisen lasin, valon määrä on tullut $0{,}75^x$-kertaiseksi eli valon määrä on

$0{,}75^x a$.

Kun lasin paksuus $x = 0{,}43$, lasin läpäisevän valon määrä on

$0{,}75^{0{,}43} a \approx 0{,}88a$.

Lasin läpäisee 88 % valosta.

VASTAUS 88 %

Harjoituksia

117. Bakteerien määrä huoneenlämpöisessä jauhelihaerässä on nyt 1 500. Bakteerien määrän tiedetään 7,9-kertaistuvan tunnissa. Mikä bakteerien lukumäärä on a) 1,5 tunnin kuluttua b) 15 minuutin kuluttua?

118. Radioaktiivisesta isotoopista cesium-137 hajoaa vuodessa 2,27 %. Ydinjätevarastossa ainetta on nyt 3,28 kg. Muodosta funktio, joka ilmaisee isotoopin määrän x vuoden kuluttua.
a) Kuinka paljon ainetta on jäljellä 15 vuoden kuluttua?
b) Aine tuotiin varastoon 1,5 vuotta sitten. Kuinka paljon ainetta oli silloin?

Logaritmi

Logaritmin määritelmä

Jos a on mikä tahansa positiivinen luku, niin eksponenttiyhtälöllä $10^x = a$ on ratkaisu. Ratkaisua kutsutaan luvun a *logaritmiksi*.

Luvun a logaritmi merkitään $\lg a$. Käytetään myös merkintää $\log_{10} a$.*

$\lg 10\,000 = 4$, sillä $10\,000 = 10^4$
$\lg 0{,}000\,001 = -6$, sillä $0{,}000\,001 = 10^{-6}$

Koska luvun a logaritmi on yhtälön $10^x = a$ ratkaisu, niin $10^{\lg a} = a$ eli

$$a = 10^{\lg a}.$$

Siis jokainen positiivinen luku voidaan logaritmin avulla ilmaista luvun 10 potenssina.

Laskimella (näppäin log) nähdään, että $\lg 17 \approx 1{,}23$.
Tämä tarkoittaa, että $17 \approx 10^{1{,}23}$.

---

* Merkintä $\log_{10} a$ korostaa, että kyseessä on 10-kantainen logaritmi eli eksponenttiyhtälön $10^x = a$ ratkaisu. Vastaavasti esimerkiksi yhtälön $2^x = a$ ratkaisua kutsutaan luvun a 2-kantaiseksi logaritmiksi ja merkitään $\log_2 a$. Esimerkiksi $\log_2 8 = 3$, koska $2^3 = 8$.

ESIMERKKI 1

a) Suureen y arvo riippuu suureen x arvosta yhtälön $y = 0{,}23 \lg x + 4{,}5$ mukaisesti. Laske kahden numeron tarkkuudella y:n arvo, kun $x = 85\,000$.
b) Ratkaise kahden numeron tarkkuudella x, kun $y = 7{,}4$.

RATKAISU

a) Sijoitetaan $x = 85\,000$.

$$y = 0{,}23 \lg 85\,000 + 4{,}5 \qquad \lg 85\,000 \text{ lasketaan laskimella.}$$
$$\approx 5{,}6$$

b) Ratkaistaan yhtälö $0{,}23 \lg x + 4{,}5 = 7{,}4$.

$$0{,}23 \lg x + 4{,}5 = 7{,}4 \quad | -4{,}5 \qquad \text{Yhtälöstä ratkaistaan ensin } \lg x.$$
$$0{,}23 \lg x = 2{,}9 \quad | : 0{,}23$$
$$\lg x = \frac{2{,}9}{0{,}23} \approx 12{,}61$$
$$x \approx 10^{12{,}61} \approx 4{,}1 \cdot 10^{12} \qquad x = 10^{\lg x}$$

VASTAUS

a) 5,6 b) $4{,}1 \cdot 10^{12}$

Eksponenttiyhtälön $k^x = a$ ratkaiseminen

Eksponenttiyhtälö $k^x = a$ ratkaistaan ilmaisemalla yhtälön molemmat puolet luvun 10 potensseina.

$k^x = a$ — Sijoitetaan $k = 10^{\lg k}$ ja $a = 10^{\lg a}$.
$(10^{\lg k})^x = 10^{\lg a}$ — Käytetään potenssin potenssin kaavaa $(a^m)^n = a^{mn}$.
$10^{x \cdot \lg k} = 10^{\lg a}$ — Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.
$x \cdot \lg k = \lg a \quad | : \lg k$
$x = \dfrac{\lg a}{\lg k}$

Eksponenttiyhtälön $k^x = a$ ratkaisu

Eksponenttiyhtälön $k^x = a$ ratkaisu on

$$x = \frac{\lg a}{\lg k}.$$

Eksponenttiyhtälön $k^x = a$ voi ratkaista kaavalla $x = \frac{\lg a}{\lg k}$ kaavaa perustelematta. Kirjan esimerkeissä näytetään, kuinka ratkaisuun voi päätyä välivaiheiden kautta silloin, kun kaava ei ole muistissa.

ESIMERKKI 2 Ratkaise eksponenttiyhtälö $2^x = 6$ kolmen numeron tarkkuudella.

RATKAISU

$2^x = 6$ — Sijoitetaan $2 = 10^{\lg 2}$ ja $6 = 10^{\lg 6}$.

$(10^{\lg 2})^x = 10^{\lg 6}$ — Käytetään potenssin potenssin kaavaa.

$10^{x \lg 2} = 10^{\lg 6}$ — Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$x \lg 2 = \lg 6 \quad | : \lg 2$

$x = \frac{\lg 6}{\lg 2} \approx 2{,}58$ — Ratkaisun voi kirjoittaa myös suoraan ilman välivaiheita.

VASTAUS $x \approx 2{,}58$

ESIMERKKI 3

Tilille, jonka vuotuinen korko lähdeveron vähentämisen jälkeen on 1,7 %, talletettiin vuoden 2006 alussa 4 000 euroa. Minkä vuoden alussa tilin pääoma ensimmäisen kerran ylittää 7 500 euroa?

RATKAISU

Koska $100\ \% + 1{,}7\ \% = 101{,}7\ \%$, talletus tulee joka vuosi 1,017-kertaiseksi. Tilin pääoma x vuoden kuluttua on $1{,}017^x \cdot 4\,000$ euroa. Arvon tulee olla 7 500 euroa.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$1{,}017^x \cdot 4\,000 = 7\,500 \qquad \big| : 4\,000$$

$$1{,}017^x = 1{,}875$$

Sijoitetaan $1{,}017 = 10^{\lg 1{,}017}$ ja $1{,}875 = 10^{\lg 1{,}875}$.

$$(10^{\lg 1{,}017})^x = 10^{\lg 1{,}875}$$

Käytetään potenssin potenssin kaavaa.

$$10^{x \lg 1{,}017} = 10^{\lg 1{,}875}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$x \lg 1{,}017 = \lg 1{,}875 \qquad \big| : \lg 1{,}107$$

$$x = \frac{\lg 1{,}875}{\lg 1{,}017} \approx 37{,}3$$

Ratkaisun voi kirjata myös suoraan ilman edeltävää kolmea välivaihetta.

Pääoma ylittää 7 500 euroa 38 vuoden kuluttua eli vuoden $2006 + 38 = 2044$ alussa.

VASTAUS

vuoden 2044 alussa*

---

* Toinen tapa ratkaista ongelma on laskea pääoman arvo vuosi kerrallaan, kunnes arvo 7 500 ylittyy. Tällöin laskimen näyttöön jäänyt edellinen arvo kerrotaan aina luvulla 1,017. Suoritukseen on tällöin kirjattava kaikki lasketut arvot sopivasti pyöristettyinä (tässä tapauksessa esimerkiksi 0,1 euron tarkkuudella).

Harjoituksia

119. Määritä. a) $\lg 1000$ b) $\lg 10^{12}$ c) $\lg 10^{1230}$

120. Määritä kolmen numeron tarkkuudella sellainen luku x, että $10^x = \frac{1}{3}$.

121. Määritä kahden numeron tarkkuudella luku a, kun
a) $\lg a = 12{,}4$ b) $2 \lg a + 3{,}8 = 0$.

122. Suureen y arvo riippuu suureen x arvosta yhtälön $y = 1{,}5 \lg x - 2{,}0$ mukaisesti.
a) Laske kahden numeron tarkkuudella y:n arvo, kun $x = 17\,000$.
b) Ratkaise kahden numeron tarkkuudella x, kun $y = 0{,}70$.

123. Ratkaise yhtälö $2^x = 12$ kolmen numeron tarkkuudella.

124. Pankkitilille, jonka vuotuinen korko on 2,00 %, talletetaan 3 000 euroa. Kuinka monessa vuodessa talletuksen arvo ylittää 4 500 euroa?

Potenssiyhtälö

Juuret

Oletetaan, että luku a on positiivinen ($a > 0$). Potenssiyhtälön

$x^n = a$

positiivista juurta kutsutaan luvun a *n. juureksi*.

Luvun a n. juuri merkitään $\sqrt[n]{a}$.

Esimerkiksi luvun 243 viides juuri on 3, koska $3^5 = 243$.

Merkitään $\sqrt[5]{243} = 3$.

Luvun 256 kahdeksas juuri on 2, koska $2^8 = 256$.

Merkitään $\sqrt[8]{256} = 2$.

Murtopotenssimerkintä

Likiarvon laskemiseksi luvun n. juuri voidaan merkitä ja laskea myös potenssina:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Esimerkiksi on $\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}} = 7^{0{,}25}$.

Potenssiyhtälön $x^n = a$ ratkaiseminen

Oletetaan, että luku a on positiivinen $(a > 0)$.

Potenssiyhtälön $x^n = a$ juurten lukumäärä riippuu siitä, onko eksponentti n parillinen vai pariton.

n pariton

$x^n = a$ Yhtälön ainoa ratkaisu on luvun a n. juuri.

$x = \sqrt[n]{a}$

Esimerkiksi yhtälön $x^5 = 243$ ainoa ratkaisu on luvun 243 viides juuri 3.

n parillinen

$x^n = a$ Yhtälön ratkaisut ovat luvun a n. juuri ja sen vastaluku.

$x = \sqrt[n]{a}$ tai $x = -\sqrt[n]{a}$

Esimerkiksi yhtälön $x^8 = 256$ ratkaisut ovat luvun 256 kahdeksas juuri 2 ja kahdeksannen juuren vastaluku -2.

ESIMERKKI 1 Ratkaise yhtälö $x^6 = 1\,200$. Anna vastaukseksi juurten tarkat arvot ja likiarvot neljän numeron tarkkuudella.

RATKAISU

$x^6 = 1200$ Yhtälön juuret ovat luvun 1 200 6. juuri ja sen vastaluku.

$x = \sqrt[6]{1200} \approx 3{,}260$ tai $x = -\sqrt[6]{1200} \approx -3{,}260$ Luvut $\sqrt[6]{1200}$ ja $-\sqrt[6]{1200}$ ovat juurten tarkat arvot.

Yhtälön juuret voidaan merkitä ja laskea myös murtopotensseina.

$x = 1200^{\frac{1}{6}} \approx 3{,}260$ tai $x = -1200^{\frac{1}{6}} \approx -3{,}260$

VASTAUS $x = \sqrt[6]{1200} \approx 3{,}260$ tai $x = -\sqrt[6]{1200} \approx -3{,}260$

ESIMERKKI 2 Yritys haluaa nostaa viennin arvon kahdeksassa vuodessa 40 miljoonasta eurosta 100 miljoonaan euroon. Kuinka monta prosenttia vientiä tulee vuosittain kasvattaa?

RATKAISU Jos vienti k-kertaistuu vuosittain, niin kahdeksan vuoden kuluttua vienti on $k^8 \cdot 40$ miljoonaa euroa. Viennin arvon on tällöin oltava 100 miljoonaa euroa.

$k^8 \cdot 40 = 100$ $\mid : 40$

$k^8 = 2{,}5$ Kerroin k on yhtälön positiivinen juuri.

$k = \sqrt[8]{2{,}5} \approx 1{,}12$ Tai $k = 2{,}5^{\frac{1}{8}} = 2{,}5^{0{,}125} \approx 1{,}12$.

Viennin tulee joka vuosi 1,12-kertaistua eli kasvaa 12 %.

VASTAUS 12 %

ESIMERKKI 3 Radioaktiivisen isotoopin cesium-137 puoliintumisaika on 29 vuotta. Ydinvoimalaonnettomuudessa saastuneella alueella aineen määrä on satakertainen turvalliseen määrään verrattuna. Kuinka monen vuoden kuluttua aineen määrä on sallituissa rajoissa?

RATKAISU Olkoon a aineen nykyinen määrä.

Radioaktiiviselle hajoamiselle on ominaista, että aineen määrä vähenee joka vuosi yhtä monta prosenttia. Aineen määrä tulee siis joka vuosi kerrotuksi samalla luvulla k.

29 vuodessa aineen määrä vähentyy puoleen. Ratkaistaan k.

$$k^{29}a = 0{,}5a \qquad | : a$$

$$k^{29} = 0{,}5$$

$$k = \sqrt[29]{0{,}5} \approx 0{,}9764 \qquad \text{Tai } k = 0{,}5^{\frac{1}{29}} \approx 0{,}9764.$$

Aineen määrä tulee joka vuosi 0,9764-kertaiseksi. Ratkaistaan kuinka monessa vuodessa määrä vähenee sadasosaan eli tulee 0,01-kertaiseksi.

$$0{,}9764^x a = 0{,}01a \qquad | : a$$

$$0{,}9764^x = 0{,}01 \qquad \text{Sijoitetaan } 0{,}9764 = 10^{\lg 0{,}9764} \text{ ja } 0{,}01 = 10^{\lg 0{,}01}.$$

$$(10^{\lg 0{,}9764})^x = 10^{\lg 0{,}01} \qquad \text{Käytetään potenssin potenssin kaavaa.}$$

$$10^{x \lg 0{,}9764} = 10^{\lg 0{,}01} \qquad \text{Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.}$$

$$x \lg 0{,}9764 = \lg 0{,}01 \qquad | : \lg 0{,}9764$$

$$x = \frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}9764} \approx 193$$

Ratkaisuun voi päätyä myös suoraan ilman kolmea edellistä välivaihetta.

VASTAUS noin 190 vuoden kuluttua

Harjoituksia

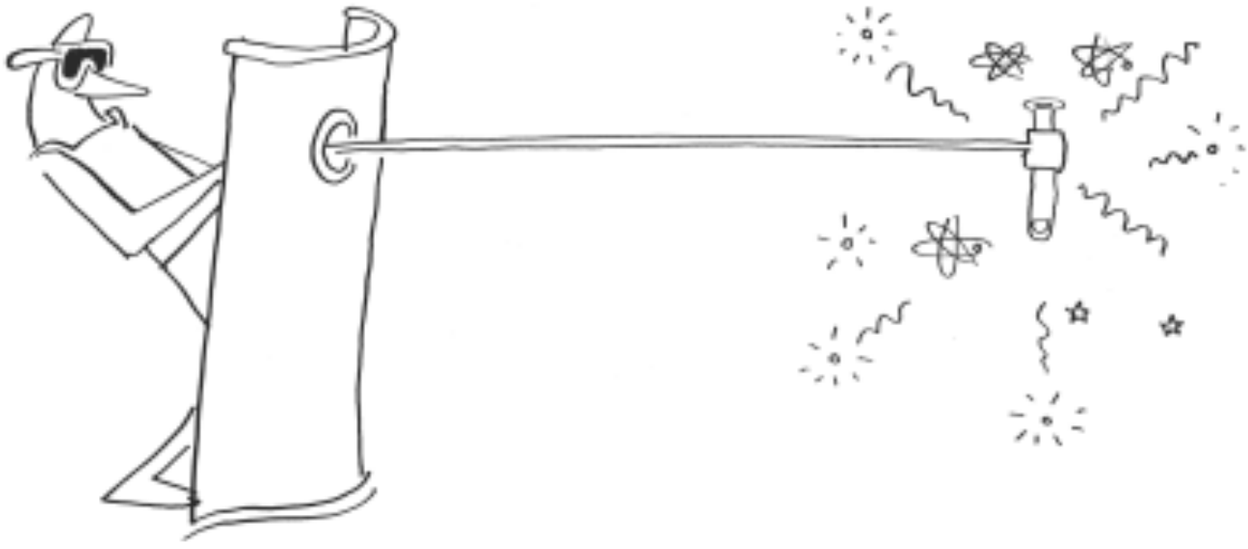
125. Ratkaise yhtälö.
a) $x^6 = 1\ 771\ 561$ b) $x^5 = 371\ 293$

126. Ratkaise yhtälö. Anna vastaukseksi juurten tarkat arvot ja kaksidesimaaliset likiarvot.
a) $3x^8 = 36$ b) $12x^3 = 8$

127. Suorakulmaisen särmiön muotoisen laatikon tilavuus on 10 litraa. Laatikon pohja on neliö ja korkeus kaksi kertaa niin suuri kuin pohjasärmien pituus. Määritä laatikon pohjasärmien pituus ja laatikon korkeus. Anna vastaukset millimetrin tarkkuudella.

128. Sijoituksen arvo kasvoi kuudessa vuodessa 25 000 eurosta 35 000 euroon. Kuinka monta prosenttia keskimääräinen vuotuinen korkotuotto oli?

129. Radioaktiivisen aineen puoliintumisaika on 15 vuorokautta. Kuinka monta prosenttia aineen määrä pienenee vuorokaudessa?



130. Oletetaan, että pölyhiukkasen halkaisija on viisi tuhannesosamillimetriä. Kuinka monta hiukkasta mahtuu yhteen kuutiometriin, jos jokainen pölyhiukkanen vie kuutionmuotoisen tilan, jonka särmänpituus on hiukkasen halkaisija? (Ylioppilaskoe, s. 2005)

131. Videokameran hinta on laskenut vuosittain 12 %, ja vuonna 2000 kamera maksoi 4 200 mk. Mikä oli sen hinta kolme vuotta aiemmin vuonna 1997? Jos hintakehitys jatkuu samanlaisena, kuinka paljon kamera maksaa vuonna 2004, jolloin rahayksikkönä on euro (1 € = 5,94573 mk)?
(Ylioppilaskoe, s. 2002)

132. Sievennä lauseke $(a + b)^2 - (a - b)^2$ ja laske sen tarkka arvo, kun $a = 10^{300}$ ja $b = 10^{-300}$. (Ylioppilaskoe, k. 1991)

133. Valokuvausfilmin herkkyys ilmaistaan kahdella asteikolla muodossa S/S°, esimerkiksi 125/22°. Asteikkojen välillä on yhteys $S° = 1 + 10 \lg S$. Täydennä herkkyyskuvaukset 2000/– ja –/24°.

134. Taulukossa on tietoja maapallon väkiluvun kehityksestä viimeisen 50 vuoden ajalta.

vuosi	maapallon väkiluku (miljardia)
1950	2,5
1970	3,7
2000	6,0

a) Kuinka suuri maapallon väestön vuotuinen kasvuprosentti on keskimäärin ollut aikavälillä 1950–1970? Entä aikavälillä 1970–2000?

b) Jos arvioidaan maapallon väkiluvun kasvavan vuodesta 2000 lähtien vuosittain 1,0 %, niin minä vuonna väkiluku saavuttaa 9,0 miljardin rajan? (Ylioppilaskoe, k. 2000)

135. Tehtaan on vähennettävä vesistöön joutuvia päästöjä yhteensä 20 prosenttia seuraavien neljän vuoden aikana.
a) Kuinka monta prosenttia on asetettava vuotuiseksi tavoitteeksi, kun halutaan, että suhteellinen vähennys on sama kaikkina vuosina?
b) Jos samaa vuotuista tavoitetta noudatetaan edelleen, kuinka monen vuoden kuluttua päästöt on saatu vähenemään alle puoleen alkuperäisestä määrästään?
(Ylioppilaskoe, k. 2006)

136. Planeetan vuosi on aika, jossa planeetta kiertää Auringon ympäri. Keplerin lain mukaan kiertoajan neliö on suoraan verrannollinen planeetan Auringosta mitatun keskietäisyyden kuutioon. Pikkuplaneetta Niilon vuosi on 3,15 Maan vuotta. Mikä Niilon etäisyys Auringosta on? Maan keskietäisyys Auringosta on $149{,}6 \cdot 10^6$ km.

137. Onnettomuuden seurauksena tehdas saastutti puhdasvetistä lampea niin, että veden saastepitoisuudeksi tuli 20 ppm (ppm = miljoonasosa). Lammen vesi vaihtuu heikon virtauksen vuoksi hyvin hitaasti: vuosittain vain 2 % sen vedestä korvautuu puhtaalla vedellä. Kuinka monen vuoden kuluttua vesi on jälleen uimakelpoista, kun vaatimuksena on, että saastepitoisuus alittaa 2 ppm? (Ylioppilaskoe, k. 1999)

138. Äänen desibelilukema D liittyy äänen intensiteettiin I kaavalla $D = 10\,(\log_{10} I + 12)$. Kaupunki oli asettanut teltassa järjestetylle konsertille 65 desibelin ylärajan. Yläraja ylitettiin kuitenkin kolmella desibelillä. Kuinka monta prosenttia äänen intensiteetti oli sallittua suurempi?
(Ylioppilaskoe, k. 1997)

139. Miksi luvut 6^{2999} ja 3^{4891} eivät voi olla yhtä suuret? Ilmaise luvut 6^{2999} ja 3^{4891} potensseina, joiden kantaluku on 10, ja tutki, kumpi luvuista on suurempi.

140. Pieneläinklinikassa käytetään kertaannoksena annettavaa nukutusainetta, jonka määrä elimistössä vähenee eksponentiaalisesti siten, että kolmen tunnin kuluttua aineesta on enää puolet jäljellä. Leikkauksen ajan on nukutusainetta elimistössä oltava vähintään 23 mg eläimen kutakin painokiloa kohti. Kuinka suuri määrä nukutusainetta on vähintään annettava 20 kg painavalle koiralle leikkausta varten, kun leikkauksen on arvioitu kestävän 1 h 15 min?
(Ylioppilaskoe, k. 2001)

141. Floridan rannikolta on löydetty fossiilisia hain hampaita, jotka ovat kuuluneet kymmeniätuhansia vuosia sitten sukupuuttoon kuolleelle valkohain esi-isälle. Kuinka vanha on hain hammas, kun sen sisältämän radioaktiivisen hiili-isotoopin C-14-pitoisuus on pienentynyt 9 prosenttiin elävässä organismissa olevasta C-14-pitoisuudesta? Isotoopin C-14 puoliintumisaika on noin 5 730 vuotta. (Ylioppilaskoe, s. 2000)

142. Lääkeaineen pitoisuus puoliintuu elimistössä yksilöllisesti vaihdellen 15–18 tunnissa. Lääkityksen päätyttyä aineen voidaan katsoa poistuvan elimistöstä ajassa, joka on viisi kertaa puoliintumisaika. Kuinka monta prosenttia lääkeainetta on tuolloin kuitenkin vielä jäljellä? Kuinka monta tuntia lääkityksen jälkeen on odotettava, jotta 99 % lääkeaineesta on poistunut elimistöstä?
(Ylioppilaskoe, s. 2004)

143. Vuoden 2002 tammikuun alussa talletetaan tietty summa tilille, jolle maksetaan vuotuista korkoa 2,54 %, ja tasan vuoden kuluttua samansuuruinen summa toiselle tilille, jonka korkoprosentti on 3,25. Varat on tarkoitus nostaa tileiltä, kun talletukset ovat kasvaneet yhtä suuriksi. Arvioi kuukauden tarkkuudella, milloin tämä tapahtuu. Sovella koronkoronlaskuperiaatetta, muodosta yhtälö ja ratkaise se. Lähdeveroa ei oteta huomioon.
(Ylioppilaskoe, k. 2003)

Lukujonot ja summat

1. Kuinka monta tikkua on

a) 4. kuviossa

b) 10. kuviossa

c) *n*. kuviossa?

2. Lukujono 1, 5, 9, ... on aritmeettinen.

a) Mitkä lukujonon 5 seuraavaa jäsentä ovat?

b) Mikä lukujonon 100. jäsen on?

c) Laske jonon 100 ensimmäisen jäsenen summa.

3. Lukujono 3, 6, 12, ... on geometrinen.

a) Mikä jonon seuraava jäsen on?

b) Mikä jonon 10. jäsen on?

c) Laske jonon 10 ensimmäisen jäsenen summa.

4. Erään aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on 1 ja neljäs jäsen 19. Määritä jonon toinen ja kolmas jäsen.

Tehtävien vastaukset ovat seuraavalla sivulla.

Lukujono

Lukujonon kuvailu

Lukujono kuvaillaan antamalla sääntö, jonka avulla voidaan laskea jonon jokainen jäsen.

Jono kuvaillaan usein lausekkeen avulla:

$a_n = f(n)$.

Jonon jäsenet lasketaan sijoittamalla jäsenen järjestysnumero jonon lausekkeeseen.

Jonon $a_n = 2n - 1$ kolme ensimmäistä jäsentä ovat
$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ ja $a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.
Jono jatkuu 7, 9, 11, ... Kyseessä on parittomien positiivisten kokonaislukujen jono.

Lukujono voidaan kuvailla niin, että ilmoitetaan jonon ensimmäinen jäsen (tai ensimmäiset jäsenet) ja lisäksi annetaan kaava, joka ilmaisee, kuinka muut jäsenet lasketaan edellisten jäsenten avulla. Näin kuvailtua jonoa kutsutaan *rekursiiviseksi lukujonoksi*. Kaava, jolla muut jäsenet lasketaan, on jonon *rekursiokaava*.

Määrittelemällä
$a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n \geqslant 3$,
saadaan jono, jonka kaksi ensimmäistä jäsentä ovat ykkösiä ja kolmannesta jäsenestä alkaen jokainen jäsen on kahden edellisen jäsenen summa. Jono alkaa 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
Kyseessä on kuuluisa ns. Fibonaccin jono.

TAIDANKO? VASTAUKSET

1. a) 13 b) 31 c) $3n + 1$ **2.** a) 13, 17, 21, 25, 29 b) 397 c) 19 900
3. a) 24 b) 1 536 c) 3 069 **4.** 7 ja 13

ESIMERKKI 1 Määritä jonon $a_n = n^2 - n$ viisi ensimmäistä jäsentä. Onko luku 3 192 jonon jäsen? Jos on, niin kuinka mones jonon jäsen luku 3 192 on?

RATKAISU Jonon viisi ensimmäistä jäsentä lasketaan sijoittamalla n:n arvot 1, 2, 3, 4 ja 5 jonon lausekkeeseen.

n	$a_n = n^2 - n$
1	$1^2 - 1 = 0$
2	$2^2 - 2 = 2$
3	$3^2 - 3 = 6$
4	$4^2 - 4 = 12$
5	$5^2 - 5 = 20$

Jonon viisi ensimmäistä jäsentä ovat 0, 2, 6, 12 ja 20.

Ratkaistaan, onko olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n, että $n^2 - n = 3\,192$.

$$n^2 - n = 3192$$

$$n^2 - n - 3192 = 0$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3192)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12768}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{12769}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 113}{2}$$

$$n = \frac{1 + 113}{2} = \frac{114}{2} = 57 \text{ tai } n = \frac{1 - 113}{2} = \frac{-112}{2} = -56$$

Luku 3 192 on jonon 57. jäsen.

VASTAUS Viisi ensimmäistä jäsentä 0, 2, 6, 12 ja 20.
Luku 3 192 on jonon 57. jäsen.

ESIMERKKI 2

Kalastuskauden alkaessa lampeen oli urheilukalastajia varten tuotu 4 000 kirjolohta. Kirjolohista kalastetaan joka viikko 15 %, mutta aina seuraavan viikon alussa lampeen tuodaan 400 uutta kalaa. Kuvaile lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$, jonka jäsen a_n on lohikannan suuruus n. viikon alussa. Kuinka monta kalaa lammessa on 12. viikon alussa?

RATKAISU

Kirjolohien määrät viikon alussa muodostavat jonon a_n, jonka

ensimmäinen jäsen on $a_1 = 4\,000$,

toinen jäsen $a_2 = 0{,}85 \cdot 4\,000 + 400 = 3\,800$

ja kolmas jäsen $a_3 = 0{,}85 \cdot 3\,800 + 400 = 3\,630$.

Toisesta jäsenestä alkaen jokainen jäsen a_n saadaan edellisestä jäsenestä a_{n-1} kertomalla luvulla 0,85 ja lisäämällä tuloon 400.

Lukujonon kuvailu on:

$a_1 = 4\,000$ ja $a_n = 0{,}85 \cdot a_{n-1} + 400$, kun $n \geqslant 2$.

Lasketaan jonon jäseniä käyttämällä hyväksi laskimen [Ans]-näppäintä. Jäsenet kirjataan paperille samalla sopivasti pyöristäen.

$a_1 = 4\,000$
$a_2 = 3\,800$ 0.85 [×] [Ans] [+] 400
$a_3 = 3\,630$
$a_4 \approx 3\,486$
$a_5 \approx 3\,363$
$a_6 \approx 3\,258$
$a_7 \approx 3\,170$
$a_8 \approx 3\,094$
$a_9 \approx 3\,030$
$a_{10} \approx 2\,975$
$a_{11} \approx 2\,929$
$a_{12} \approx 2\,890$

12. viikon alussa lammessa on noin 2 900 kalaa.

VASTAUS

2 900 kalaa

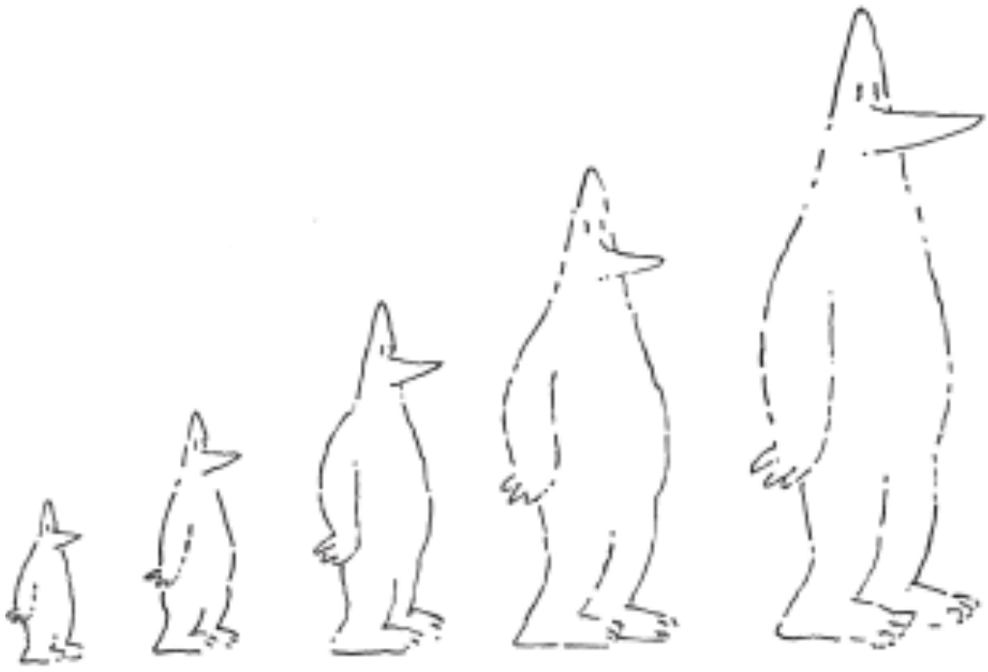
Harjoituksia

144. Jonossa $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$ on $b_n = n^{(-1)^n n}$. Laske jonon viisi ensimmäistä jäsentä.

145. Laske jonon a_n viisi ensimmäistä jäsentä, kun
a) $a_1 = 3$ ja $a_n = 2a_{n-1} + 1$, kun $n \geqslant 2$
b) $a_1 = a_2 = 1$ ja $a_n = a_{n-2} + a_{n-1} + n$, kun $n \geqslant 3$.

146. Jono $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ alkaa $\frac{7}{2},\ \frac{8}{4},\ \frac{9}{6},\ \ldots$ ja jatkuu samaan tapaan niin, että osoittajat ovat peräkkäisiä kokonaislukuja ja nimittäjät peräkkäisiä parillisia lukuja. Muodosta jonon n. jäsenen lauseke ja määritä jonon 181. jäsen.

147. Lukujonossa $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ on $a_n = 17n - 11$. Ovatko luvut 2 011 ja 6 313 jonon jäseniä? Jos ovat, niin kuinka monensia jonon jäseniä luvut ovat?



Aritmeettinen jono ja summa

Aritmeettinen jono

Lukujono

$$\begin{array}{cccccc} & +d & +d & +d & & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots, & \end{array}$$

jonka seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen sama luku, on *aritmeettinen jono*.

Aritmeettisen jonon n. jäsenen kaava

Aritmeettisen jonon n. jäsen saadaan lisäämällä ensimmäiseen jäseneen $n - 1$ kappaletta lukuja d, eli

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Aritmeettinen summa

Aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten summaa $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ kutsutaan *aritmeettiseksi summaksi*.
Aritmeettisen summan arvo voidaan laskea kaavalla

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

Ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan keskiarvo kerrottuna yhteenlaskettavien lukumäärällä.

missä
a_1 on ensimmäinen yhteenlaskettava,
a_n on viimeinen yhteenlaskettava,
n on yhteenlaskettavien lukumäärä.

ESIMERKKI 1 Määritä aritmeettisen jonon 12, 19, 26, ... neljäskymmenes jäsen ja laske jonon neljänkymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

RATKAISU Jonon 12, 19, 26, ... seuraava jäsen saadaan aina edellisestä lisäämällä luku 7. Jonon n. jäsen on

$a_n = 12 + (n - 1) \cdot 7.$ $a_n = a_1 + (n-1)d$, missä $a_1 = 12$ ja $d = 7.$

Jonon 40. jäsen on

$a_{40} = 12 + (40 - 1) \cdot 7 = 12 + 39 \cdot 7 = 285.$

Jonon 40 ensimmäisen jäsenen summa

$12 + 19 + 26 + ... + 285$

on ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan keskiarvo kerrottuna yhteenlaskettavien lukumäärällä 40:

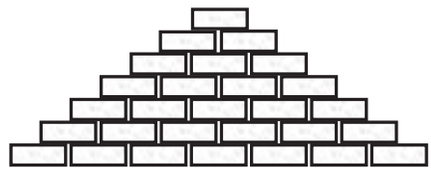
$$S_{40} = 40 \cdot \frac{12 + 285}{2} = 5\,940.$$

VASTAUS 40. jäsen 285, 40 ensimmäisen jäsenen summa 5 940

ESIMERKKI 2 Rakennukselle muurataan 2 000 tiilestä mahdollisimman korkea kolmion muotoinen pääty niin, että jokaisessa tiilikerroksessa on aina yksi tiili vähemmän kuin edellisessä ja ylimmässä kerroksessa on yksi tiili. Montako tiiltä muurataan alimpaan kerrokseen? Jääkö tiiliä yli?

RATKAISU Olkoon n tiilien määrä alimmassa kerroksessa. Tiilien lukumäärä on

$1 + 2 + 3 + ... + n.$



Lukumäärä on aritmeettinen summa, jossa on n yhteenlaskettavaa.

$$1 + 2 + 3 + ... + n = n \cdot \frac{1+n}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

Ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan keskiarvo kerrottuna yhteenlaskettavien lukumäärällä.

Ratkaistaan, millä n:n arvolla tiilien lukumäärä on 2 000.

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2000 \qquad | \cdot 2$$

$$n(n+1) = 4000$$

$$n^2 + n = 4000$$

$$n^2 + n - 4000 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4000)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{16001}}{2}$$

$$n = \frac{-1 + \sqrt{16001}}{2} \approx 62{,}7 \quad \text{tai} \quad n = \frac{-1 - \sqrt{16001}}{2} \approx -63{,}7$$

Suurin mahdollinen n:n arvo on 62. Alimpaan kerrokseen on muurattava 62 tiiltä.

Seinään muurataan tällöin $\frac{62 \cdot 63}{2} = 1\,953$ tiiltä, joten 47 tiiltä jää yli.

VASTAUS 62, yli jää 47 tiiltä

ESIMERKKI 3

Konserttisalin katsomoon on sijoitettava mahdollisimman monta, mutta kuitenkin enintään 1 000, istumapaikkaa 15 penkkiriviin niin, että seuraavalla rivillä on aina kaksi istuinta enemmän kuin edellisellä. Kuinka monta istumapaikkaa tulee ensimmäisellä rivillä olla? Kuinka monta istuinta koko katsomossa tällöin on?

RATKAISU

Olkoon x istuinten lukumäärä ensimmäisellä rivillä. Istuinten lukumäärät muodostavat aritmeettisen jonon $x,\ x+2,\ \ldots$. Viimeisellä, 15. rivillä on $x + 14 \cdot 2 = x + 28$ istuinta.

Istuimien lukumäärä salissa on aritmeettinen summa, jonka ensimmäinen yhteenlaskettava on x, viimeinen yhteenlaskettava $x + 28$ ja jossa on 15 yhteenlaskettavaa.

Istuinten lukumäärä on

$$15 \cdot \frac{x + (x + 28)}{2}$$

Ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan keskiarvo kerrottuna yhteenlaskettavien lukumäärällä.

$$= \frac{15(2x + 28)}{2}.$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{15(2x + 28)}{2} = 1\,000 \qquad \big| \cdot 2$$

$$15(2x + 28) = 2\,000$$

$$30x + 420 = 2\,000$$

$$30x = 1\,580 \qquad \big| : 30$$

$$x \approx 52{,}7$$

Suurin mahdollinen istuinten lukumäärä ensimmäisellä rivillä on 52. Istuinten lukumäärä salissa on tällöin

$$15 \cdot \frac{52 + (52 + 28)}{2} = 990.$$

VASTAUS

ensimmäiselle riville 52 istumapaikkaa, koko saliin 990 istumapaikkaa

Harjoituksia

148. Määritä aritmeettisen jonon 11, 23, 35, ... viideskymmenes jäsen.

149. Tutki, ovatko luvut 4 410 ja 5 337 aritmeettisen jonon 50, 67, 84, ... jäseniä. Jos ovat, niin kuinka monensia jonon jäseniä luvut ovat?

150. Aritmeettisen jonon a_1, a_2, a_3, ... ensimmäinen jäsen on 7 ja yhdeksäs jäsen 295. Mikä jonon toinen jäsen on?

151. Määritä ensimmäinen aritmeettisen jonon -8, -1, 6, ... jäsen, joka on suurempi kuin 600 000. Kuinka mones jonon jäsen tämä jäsen on?

152. Laske aritmeettisen jonon 1, 7, 13, ... sadan ensimmäisen jäsenen summa.

153. Kolmen viikon harjoittelujakson aikana urheilija harjoittelee ensimmäisenä päivänä 45 minuuttia ja sen jälkeen pidentää harjoitteluaikaa joka päivä yhtä paljon niin, että viimeisenä päivänä hän harjoittelee 3,5 tuntia. Kuinka pitkän ajan hän yhteensä harjoittelee kolmen viikon aikana? Anna vastaus tunteina ja minuutteina minuutin tarkkuudella.

Geometrinen jono ja summa

Geometrinen jono

Lukujono

$$\begin{array}{cccccc} & \cdot q & & \cdot q & & \cdot q \\ a_1, & & a_2, & & a_3, & & a_4, \ldots, \end{array}$$

jonka seuraava jäsen saadaan aina kertomalla edellinen jäsen samalla luvulla, on *geometrinen jono*.

Geometrisen jonon n. jäsenen kaava

Geometrisen jonon n. jäsen saadaan kertomalla ensimmäinen jäsen $n - 1$ kertaa luvulla q, eli

$$a_n = q^{n-1} a_1.$$

Geometrinen summa

Geometrisen jonon peräkkäisten jäsenten summaa kutsutaan *geometriseksi summaksi*. Kun lasketaan yhteen geometrisen jonon

$a,\ aq,\ aq^2, \ldots$

n ensimmäistä jäsentä, niin geometrisen summan arvo on

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Kaavassa
a on summan ensimmäinen jäsen,
n on yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärä,
q on jonon peräkkäisten jäsenten suhdeluku.

ESIMERKKI 1 Määritä geometrisen jonon 10, 70, 490, ... yhdeksäs jäsen ja laske jonon yhdeksän ensimmäisen jäsenen summa.

RATKAISU Geometrisen jonon 10, 70, 490, ... seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 7. Jonon n. jäsen on

$7^{n-1} \cdot 10$,

ja erityisesti jonon yhdeksäs jäsen on

$7^8 \cdot 10 = 57\,648\,010$.

Jonon yhdeksän ensimmäisen jäsenen summa

$10 + 7 \cdot 10 + 7^2 \cdot 10 + 7^3 \cdot 10 + ... + 7^8 \cdot 10$

voidaan laskea geometrisen summan kaavalla. Summan ensimmäinen jäsen on 10, peräkkäisten jäsenten suhde 7 ja yhteenlaskettavien lukumäärä 9.

$$S_9 = \frac{10(1-7^9)}{1-7}$$

Kaavaan $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ sijoitetaan $a = 10$, $q = 7$ ja $n = 9$.

$$= 67\,256\,010$$

VASTAUS Yhdeksäs jäsen on 57 648 010. Yhdeksän ensimmäisen jäsenen summa on 67 256 010.

ESIMERKKI 2 Matti tallettaa 50-vuotissyntymäpäivänään ja jokaisena seuraavana syntymäpäivänään aina 59-vuotispäivään saakka saman rahasumman tilille, johon vuoden välein lisätään 1,75 %:n korko. Kun Matti täyttää 60 vuotta, hän tyhjentää tilin ja lähtee puolisonsa kanssa maailmanympärysmatkalle.

a) Kuinka paljon Matilla on matkarahaa, jos vuotuisen talletuksen suuruus on 500 euroa?

b) Kuinka suuri vuotuisen talletuksen tulisi olla, jotta matkarahaa olisi 10 000 euroa?

RATKAISU

a) Kun tiliin lisätään 1,75 %:n korko, tilin arvo tulee 1,0175-kertaiseksi.

Kun Matti täyttää 60 vuotta, ensimmäisen talletuksen arvoksi on tullut $1{,}0175^{10} \cdot 500$ euroa, toisen talletuksen arvoksi $1{,}0175^{9} \cdot 500$ euroa jne. Viimeisen talletuksen arvoksi on tullut $1{,}0175 \cdot 500$ euroa.

60-vuotissyntymäpäivänä nostettavissa oleva rahasumma on

$$1{,}0175 \cdot 500 + 1{,}0175^2 \cdot 500 + \ldots + 1{,}0175^{10} \cdot 500.$$

Kyseessä on geometrinen summa, jonka ensimmäinen jäsen on $1{,}0175 \cdot 500$, jonka peräkkäisten termien suhdeluku on $1{,}0175$ ja jossa on 10 yhteenlaskettavaa. Summan arvo on

$$\frac{1{,}0175 \cdot 500(1 - 1{,}0175^{10})}{1 - 1{,}0175}$$

Kaavaan $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ sijoitetaan $a = 1{,}0175 \cdot 500$, $q = 1{,}0175$ ja $n = 10$.

$\approx 5\,507{,}42$ (euroa).

b) Jos vuotuinen talletus on x euroa, niin 60-vuotispäivänä tilille kertynyt pääoma on

$$1{,}0175x + 1{,}0175^2x + \ldots + 1{,}0175^{10}x$$

$$= \frac{1{,}0175x(1 - 1{,}0175^{10})}{1 - 1{,}0175}.$$

Kaavaan $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ sijoitetaan $a = 1{,}0175x$, $q = 1{,}0175$ ja $n = 10$.

Pääoman tulee olla 10 000 euroa.

$$\frac{1{,}0175x(1 - 1{,}0175^{10})}{1 - 1{,}0175} = 10\,000$$

$$\frac{1{,}0175x(1 - 1{,}0175^{10})}{-0{,}0175} = 10\,000 \qquad \big| \cdot (-0{,}0175)$$

$$1{,}0175x(1 - 1{,}0175^{10}) = -175 \qquad \big| : 1{,}0175(1 - 1{,}0175^{10})$$

$$x \approx 907{,}87 \text{ (euroa)}$$

VASTAUS

a) 5 507,42 euroa b) 907,87 euroa

ESIMERKKI 3 Ilmestymisvuonna 2000 kirjaa myytiin 600 nidettä ja sen jälkeen joka vuosi aina 5 % vähemmän kuin edellisenä. Minä vuonna kirjasta otettu 8 000 niteen painos loppuu?

RATKAISU Koska myynnin määrä vähenee joka vuosi 5 %, myynti tulee joka vuosi 0,95-kertaiseksi. Myynnin määrät peräkkäisinä vuosina muodostavat geometrisen jonon

$600,\ 0{,}95 \cdot 600,\ 0{,}95^2 \cdot 600, \ldots$.

Myynti n vuoden aikana on jonon n:n ensimmäisen jäsenen summa

$$S_n = \frac{600(1 - 0{,}95^n)}{1 - 0{,}95}$$ Kaavaan $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ sijoitetaan $a = 600$ ja $q = 0{,}95$.

$$= \frac{600(1 - 0{,}95^n)}{0{,}05} = 12000(1 - 0{,}95^n).$$

Ratkaistaan, kuinka monessa vuodessa myynti saavuttaa 8 000.

$12000(1 - 0{,}95^n) = 8000$ | : 12000

$1 - 0{,}95^n \approx 0{,}667$ | −1

$-0{,}95^n = -0{,}333$ | · (−1)

$0{,}95^n = 0{,}333$ Sijoitetaan $0{,}95 = 10^{\lg 0{,}95}$ ja $0{,}333 = 10^{\lg 0{,}333}$.*

$(10^{\lg 0{,}95})^n = 10^{\lg 0{,}333}$

$10^{n \lg 0{,}95} = 10^{\lg 0{,}333}$

$n \lg 0{,}95 = \lg 0{,}333$ | : lg 0,95

$n = \frac{\lg 0{,}333}{\lg 0{,}95} \approx 21{,}4$ Ratkaisuun voi päätyä myös suoraan ilman kolmea edellistä välivaihetta.

Painos loppuu 22. myyntivuoden aikana eli vuonna 2000 + 21 = 2021.

VASTAUS vuonna 2021

* Yhtälö voidaan ratkaista myös laskemalla potenssin $0{,}95^n$ arvoja, kunnes arvo 0,333 alittuu. Suoritukseen on kirjattava jokainen laskettu arvo.

Harjoituksia

154. Määritä geometrisen jonon $6,\ 24,\ 96,\ \ldots$ kahdestoista jäsen.

155. Geometrisen jonon $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ ensimmäinen jäsen $a_1 = 7$ ja yhdeksäs jäsen $a_9 = 458\,752$. Määritä jonon toinen jäsen.

156. Mikä on jonon $1,\ 0{,}75,\ 0{,}75^2,\ \ldots$ n. jäsenen lauseke? Kuinka mones jonon jäsen on ensimmäinen, jonka arvo alittaa $0{,}00001$?

157. Laske geometrisen jonon $2,\ 6,\ 18,\ \ldots$ kuudentoista ensimmäisen jäsenen summa.

158. Mikä on geometrisen jonon $3\,200,\ 1\,600,\ 800,\ \ldots$ peräkkäisten jäsenten suhdeluku? Muodosta lauseke jonon n:n ensimmäisen jäsenen summalle S_n, ja laske jonon 13 ensimmäisen jäsenen summa.

159. Kuinka monta prosenttia suurempi on aritmeettisen lukujonon

2, 4, 6, 8, ...

999 ensimmäisen termin summa kuin sen 888 ensimmäisen termin summa?
(Ylioppilaskoe, k. 2002)

160. Lukujonon ensimmäinen termi on 2 401 ja viides termi 1. Määritä jonon toinen, kolmas ja kymmenes termi, kun jono on
a) aritmeettinen b) geometrinen.

161. Toipilaan tulee leikkauksen jälkeen kuntouttaa lihaksiaan harjoittelemalla tiettyä liikesarjaa päivittäin kuukauden mittaisen kuntoutusjakson ajan. Hän aloittaa 15 minuutin pituisella voimistelulla ja lisää suoritusaikaa kuntoutusohjelman mukaan joka kerralla viidellä prosentilla.
a) Kuinka pitkän ajan hän voimistelee kuntoutusjakson 30. päivänä?
b) Kuinka paljon hän kaikkiaan käyttää aikaa voimisteluun kuntoutusjakson aikana?
Anna vastaukset minuutin tarkkuudella.
(Ylioppilaskoe, s. 2000)

162. Opiskelija on opintojensa alussa tehnyt lainasopimuksen, jonka mukaan hän nostaa jokaisen opiskeluvuoden alussa opintolainaa 4 000 €. Vuotuinen lainakorko on 4 %, mutta opiskeluaikana ei korkoa eikä lyhennyksiä tarvitse maksaa, vaan kertynyt korko liitetään jokaisen opiskeluvuoden lopussa lainapääomaan. Laske sopivan summalausekkeen avulla, paljonko opiskelijalla on velkaa, kun hän 12 vuoden opintojen jälkeen lopulta valmistuu.
(Ylioppilaskoe, k. 2004)

163. Asuntolaina, jonka suuruus on 120 000 euroa, maksetaan takaisin 20 vuoden aikana niin, että aina puolivuosittain maksetaan yhtä suuri lyhennys. Lainalle on sovittu kiinteä 6,50 %:n korko. Kuinka paljon rahaa kaikkiaan kuluu lainan korkoihin?

164. Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on $\frac{3}{2}$, toinen on 7 ja viimeinen 117.
Laske jonon summa. (Ylioppilaskoe, k. 2006)

165. Geometrisen jonon suhdeluku on 4 ja kymmenen ensimmäisen termin summa 3 844 775. Määritä jonon ensimmäinen termi. Mikä on jonon kymmenes termi?
(Ylioppilaskoe, s. 2003)

166. Kuntoilijan tavoitteena on juosta kahdessa viikossa 100 kilometriä niin, että hän pidentää joka päivä juoksumatkaa 500 metrillä. Kuinka pitkä matka hänen on juostava ensimmäisenä päivänä?

167. Lelua myytiin ensimmäisellä viikolla 500 kappaletta, minkä jälkeen televisiomainonta alkoi vaikuttaa niin, että lelua myytiin joka viikko 40 % enemmän kuin edellisellä viikolla. Kuinka monennella viikolla maahan tuotu 80 000 lelun erä loppuu?

168. Määritä suurin sellainen luonnollinen luku m, että $1 + 2 + 3 + ... + m \leqslant 462\,241$.
(Ylioppilaskoe, k. 1998)

169. Kirjolohien kasvattaja istutti kalastusaltaaseen toukokuun alussa 5 000 kirjolohta. Joka viikko altaan kirjolohista pyydettiin noin 20 %, ja seuraavan viikon alussa altaaseen siirrettiin 200 uutta kirjolohta. Kuinka monta kalaa altaassa oli, kun kalastuskausi 20. viikon lopussa päättyi? Kuinka monta kalaa altaasta oli kalastuskauden aikana pyydetty?

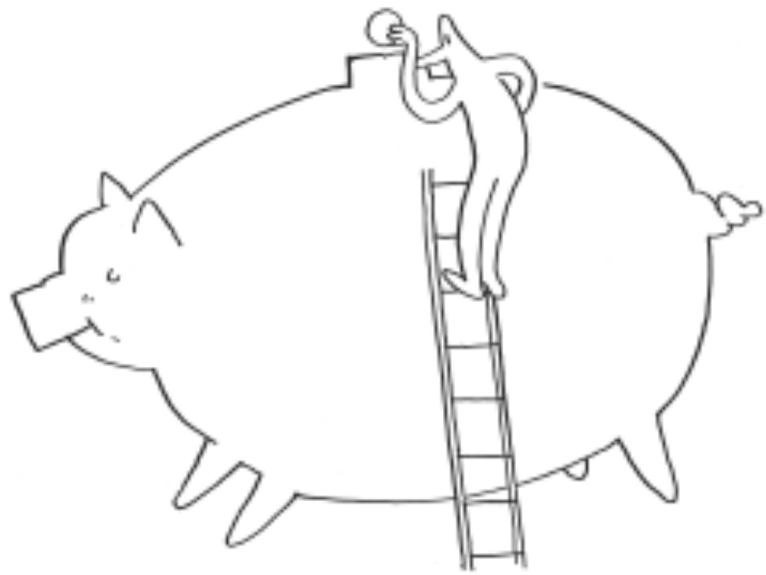
170. Lukujonon

$a_1 = 1$ ja $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}})$, kun $n \geqslant 2$,

jäsenet lähestyvät lukua $\sqrt{3}$. Laske jonon neljännen jäsenen a_4 tarkka arvo. Kuinka monta prosenttia ja mihin suuntaan jonon neljäs jäsen poikkeaa luvusta $\sqrt{3}$?

171. Luonnollisille luvuille 2 ja 3 pätee $2^2 = 1 + 3$ ja $3^2 = 1 + 3 + 5$. Esitä vastaava yhtälö luvulle 4. Yleistä tämä koskemaan minkä tahansa luonnollisen luvun n neliötä n^2 ja osoita esittämäsi kaava oikeaksi.
(Ylioppilaskoe, s. 2005)

172. Henkilö aloitti säästövakuutuksen vuoden 2000 alussa. Laaditun sijoitussuunnitelman mukaisesti hän sijoittaa joka kuukauden alussa 60 € kahdeksan vuoden ajan. Jokaisen sijoituksen yhteydessä peritään vakuutusmaksupalkkiota 2 % sijoitettavasta summasta sekä hoitokuluina 1,35 €. Säästövakuutuksen odotetaan tuottavan samoin kuin vastaava talletus, jonka vuotuinen korko on 4,4 %. Arvioi tuotto-odotuksen mukaisen säästösumman suuruus vakuutuskauden päättyessä. Mikä on vakuutuksen puhdas tuotto, kun tuotosta peritään 29 % pääomatuloveroa? (Ylioppilaskoe, s. 2002)



Tehtäväsarjoja

Sarja A

1. a) Ratkaise yhtälö $15x^2 + 2x - 1 = 0$.

b) Millä x:n arvolla lauseke $\frac{4x}{x-1}$ saa arvon 13? (Ylioppilaskoe, k. 2003)

2. a) Uusi tuntipalkka 2,37 euron korotuksen jälkeen oli 17,63 euroa. Kuinka monta prosenttia tuntipalkka nousi?

b) Sievennä lauseke $2x - x(4 - x)$ ja laske lausekkeen arvo, kun $x = -\frac{2}{3}$.

3. Sukkahousujen paksuuden yksikkö denier ilmaisee, kuinka monta grammaa 9 000 metriä sukkahousujen lankaa painaa. Eräät 15 denierin sukkahousut painoivat 20 grammaa. Kuinka monta metriä sukkahousuissa oli lankaa?

4. Ihmisen elimistö hajottaa tunnissa keskimäärin noin gramman puhdasta alkoholia jokaista kymmentä painokiloa kohti. Kuinka kauan kestää, kun 8 cl 40-prosenttista (tilavuusprosentti) alkoholia hajoaa 90 kg painavan ihmisen elimistössä? Alkoholin tiheys on 0,79 g/cm^3. (Ylioppilaskoe, s. 1999)

5. Väinö oli pyöräillyt tavanomaisesta 25 kilometrin pituisesta lenkistään 14 km ja käyttänyt siihen aikaa 38 minuuttia. Kuinka monessa minuutissa Väinön tulisi ajaa loppumatka päästäkseen tavoitteeseensa, jonka mukaan koko matkan keskinopeuden tulisi olla 23 km/h? (Ylioppilaskoe, s. 2000)

6. Erään maljan sisältämä nestemäärä on suoraan verrannollinen nestepinnan korkeuden neliöön. Korkeuden ollessa 10 cm maljа sisältää 1,0 l nestettä. Mikä on nestepinnan korkeus, kun maljassa on 2,0 l nestettä? (Ylioppilaskoe, k. 1991)

7. Uutta pesukonemallia Suomeen tuova yritys sai joulukuussa 2000 myydyksi 470 pesukonetta. Yritys sai mainostajalta tarjouksen, jossa luvattiin mainostamisen lisäävän myyntiä vuoden 2001 alusta lähtien 25 % edelliseen kuukauteen verrattuna joka kuukausi kahden vuoden ajan.

a) Kuinka monta pesukonetta yritys myisi tarjouksen mukaan vuoden 2001 kesäkuussa?

b) Kuinka monta konetta myynti olisi koko kahden vuoden aikana? (Ylioppilaskoe, k. 2002)

8. Desinfiointiliuosta sisältävän astian kyljessä on ohje: Väkevyys 40 % – laimenna ennen käyttöä 5-prosenttiseksi liuokseksi. Missä suhteessa liuosta ja vettä on sekoitettava ja kuinka paljon näitä on kaadettava 10 litran sankoon, että sanko tulisi täyteen 5-prosenttista liuosta? (Ylioppilaskoe, s. 1997)

9. Maanjäristyksessä vapautuvan seismisen energian E ja Richterin asteikon lukeman M välillä on yhteys $\log_{10} E = 11{,}8 + 1{,}5M$. Rakennus on mitoitettu kestämään järistys, jossa vapautuva seisminen energia on 50 % suurempi kuin järistyksessä, jonka voimakkuus Richterin asteikolla on 6,8. Kuinka voimakkaan järistyksen rakennus kestää Richterin asteikolla mitattuna?
(Ylioppilaskoe, k. 2005)

10. **Perintöveroasteikko**

Perinnön verotettava arvo euroa	Vero alarajalla euroa	Vero alarajan ylittävästä osasta %
3 400–17 000	85	10
17 000–50 000	1 445	13
50 000–	5 735	16

Perintöveroa päätetään keventää niin, että alimman veroluokan alaraja nostetaan 5 000 euroon. Muut rajat samoin kuin veron määrä alimman luokan alarajalla pidetään ennallaan, mutta alimmassa ja keskimmäisessä veroluokassa alarajan ylittävästä osasta maksettavaa veroprosenttia alennetaan kahdella prosenttiyksiköllä ja ylimmässä veroluokassa korotetaan puolella prosenttiyksiköllä. Laadi päätöksen mukainen uusi perintöveroasteikko. Kuinka suuresta perinnöstä maksettava uuden taulukon mukainen vero on suurempi kuin vanhan taulukon mukainen vero?

Sarja B

1. a) Ratkaise yhtälö $(3x - 2)(3x + 5) = 0$.

b) Mikä on lausekkeen $\dfrac{a^2 - c^2}{b - c}$ arvo, kun $a = 1$, $b = -2$ ja $c = -\dfrac{1}{2}$?

(Ylioppilaskoe, s. 2005)

2. a) Auto kulki puolet 180 kilometrin matkasta keskinopeudella 60 km/h ja puolet keskinopeudella 90 km/h. Mikä keskinopeus koko matkalla oli?

b) Sievennä lauseke $\dfrac{x^4 x^8}{(x^5)^2}$ ja laske lausekkeen arvo, kun $x = \dfrac{\sqrt{13}}{7}$.

3. Koulutuslinjalle hyväksytyistä 207 opiskelijasta oli naisopiskelijoita 25 % enemmän kuin miesopiskelijoita. Määritä nais- ja miesopiskelijoiden määrät muodostamalla sopiva yhtälö ja ratkaisemalla tämä.
(Ylioppilaskoe, k. 2004)

4. Maanteiden roskaantumistutkimuksen mukaan eri materiaalien osuus koko roskamäärästä on seuraava: lasi 2,7 %, metalli 7,6 %, muovi 17,7 %, paperi 64,3 %, muut 7,7 %. Kuinka monta prosenttia koko roskamäärä pienenisi, jos roskapaperin määrä saataisiin pienenemään puoleen ja muovin määrä kahteen kolmasosaan? Mikä olisi tällöin eri materiaalien osuus koko roskamäärästä?

5. Etsi viisi sellaista peräkkäistä kokonaislukua, että kolmen ensimmäisen luvun neliöiden summa on sama kuin kahden viimeisen luvun neliöiden summa. Kuinka monta tällaista lukuviisikkoa on olemassa?
(Ylioppilaskoe, s. 1996)

6. Murtolukuja ei pidä laskea yhteen seuraavasti: $\frac{3}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3+a}{2+4}$. Millä a:n arvolla saadaan kuitenkin oikea tulos?
(Ylioppilaskoe, s. 1993)

7. Tavoitteena on kasvattaa taajaman väkilukua hallitusti, niin että seuraavan kahdeksan vuoden aikana väkiluku kohoaa nykyisestä 12 300:sta 15 000:een. Kuinka monen prosentin vuotuinen väestönkasvu tulee asettaa tavoitteeksi? Jos kasvu jatkuu samanlaisena, niin kuinka monen vuoden kuluttua väkiluku ylittää 20 000?

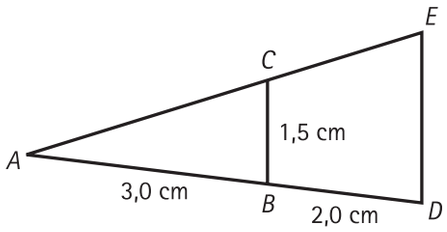
8. Kymmenen kilometrin valtatieosuudelle pystytetään valaisinpylväät 50 metrin välein. Urakoitsija hakee autolla kolme pylvästä kerrallaan varastosta, kuljettaa pylväät oikeille paikoille ja lähtee hakemaan seuraavaa erää. Varasto sijaitsee saman tien varressa kaksi kilometriä ennen valaistavan osuuden alkua. Työ alkaa varastolta ja päättyy sinne. Kuinka pitkän matkan urakoitsija joutuu siirtotyössä vähintään ajamaan?
(Ylioppilaskoe, k. 1999)

9. Säästäminen sapattivuotta varten aloitettiin vuoden 2001 alussa. Joka vuoden alussa talletetaan 1 000 euroa tilille, jolle aina vuoden lopussa lisätään 2,50 %:n korko. Minkä vuoden lopussa tilin pääoma korkojen lisäämisen jälkeen ensimmäisen kerran ylittää 20 000 euroa?

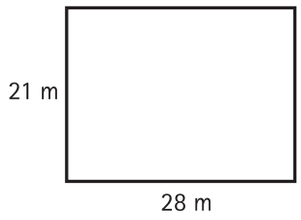
10. Sävelasteikossa c, d, e, f, g, a, h, c^1 on puolisävelaskel e:n ja f:n sekä h:n ja c^1:n välillä, muissa väleissä on kokosävelaskel. *Tasavireisessä virityksessä* puolisävelaskelet ovat yhtä suuria, mikä tarkoittaa, että sävelten f ja e sekä c^1 ja h värähdyslukujen suhde on sama; merkitään tätä k:lla. Kokosävelaskelten kohdalla peräkkäisten sävelten värähdyslukujen suhteet (jälkimmäisen suhde edelliseen) ovat myös samat ja $= k^2$. Olkoon c:n värähdysluku 130, jolloin (oktaavin päässä olevan) c^1:n värähdysluku on kaksinkertainen eli 260. Laske suhteen k tarkka arvo ja likiarvo sekä asteikon sävelten värähdysluvut kokonaisluvuiksi pyöristettyinä. (Ylioppilaskoe, s. 2001)

Tasogeometria

1. Janat BC ja DE ovat yhdensuuntaiset. Laske janan DE pituus.

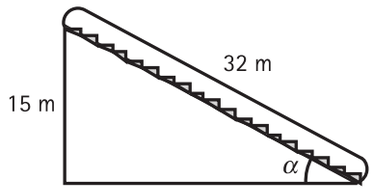


2. Laske suorakulmion lävistäjän pituus.

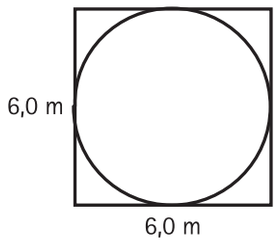


3. Auringon paistaessa 38°:n korkeudella puusta lankesi 18 metrin pituinen varjo. Kuinka korkea puu on?

4. Laske liukuportaiden kaltevuuskulma.



5. Laske neliön sisään piirretyn ympyrän
a) kehän pituus b) pinta-ala.



Tehtävien vastaukset ovat seuraavalla sivulla.

Yhdenmuotoisuus

Kuviot, jotka saadaan toisistaan suurentamalla, pienentämällä tai peilaamalla, ovat *yhdenmuotoiset*.

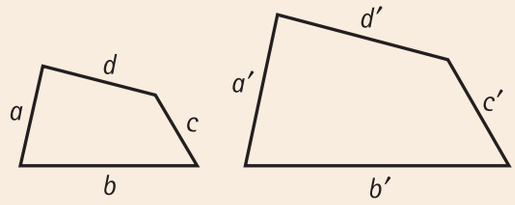
Yhdenmuotoisten kuvioiden sivut

Kun yhdenmuotoisissa kuvioissa muodostetaan mikä tahansa suhde

$$\frac{\text{vastinjanan pituus}}{\text{janan pituus}},$$

niin suhde on aina sama. Tämä suhde on *yhdenmuotoisuussuhde* eli *mittakaava*.

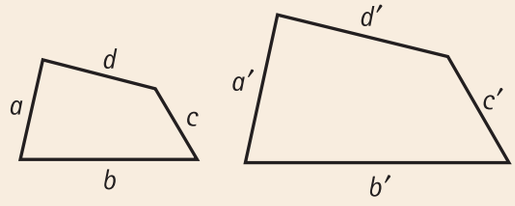
Esimerkiksi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.



Yhdenmuotoisissa kuvioissa voidaan verrantoja muodostaa myös toisin:

Saman kuvion kahden janan pituuksien suhde on yhtä suuri kuin niiden toisessa kuviossa olevien vastinjanojen pituuksien suhde.

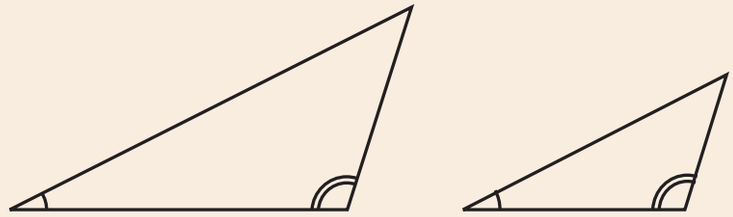
Esimerkiksi $\frac{a}{d} = \frac{a'}{d'}$.



TAIDANKO? VASTAUKSET **1.** 2,5 cm **2.** 35 m **3.** 14 m **4.** 28° **5.** a) 19 m b) 28 m^2

Kolmioiden yhdenmuotoisuuslause kk

Jos kolmion kahta kulmaa vastaavat yhtä suuret kulmat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.



ESIMERKKI 1 Joensuun ja Kuopion etäisyys linnuntietä mitattuna on 110 km. Mikä kaupunkien etäisyys on Euroopan kartalla, jonka mittakaava on 1 : 15 000 000?

RATKAISU Mittakaava on kartalta mitatun etäisyyden suhde vastaavaan etäisyyteen luonnossa. Olkoon x kaupunkien etäisyys kartalla.

$$\frac{x}{110\text{ km}} = \frac{1}{15\,000\,000}$$ Kerrotaan ristiin.

$$15\,000\,000x = 110\text{ km} \quad \big| : 15\,000\,000$$

$$x = \frac{110\text{ km}}{15\,000\,000} \approx 7{,}3 \cdot 10^{-6}\text{ km}$$ Useimmat laskimet näyttävät tuloksen kymmenpotenssimuodossa.

$$= 0{,}0000073\text{ km} = 0{,}0073\text{ m}$$ Muutetaan tulos havainnollisempaan yksikköön.

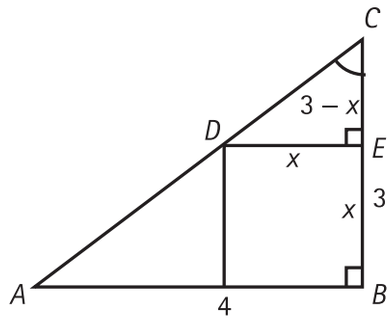
$$= 0{,}73\text{ cm} = 7{,}3\text{ mm}$$

VASTAUS 7,3 mm

ESIMERKKI 2 Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 3 ja 4. Kolmion sisään on piirretty neliö, jonka kaksi sivua ovat kateeteilla ja yksi kärki hypotenuusalla. Laske neliön sivun pituuden tarkka arvo.

RATKAISU Merkitään neliön sivun pituutta x.

Kolmio DEC on yhdenmuotoinen koko kolmion ABC kanssa (kk), sillä kolmioilla on yhteinen terävä kulma C ja molemmissa kolmioissa on suora kulma.



Muodostetaan verrantoyhtälö, josta ratkaistaan x.

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$

Sivun DE vastinsivu on AB, ja sivun EC vastinsivu on BC.

$$\frac{x}{4} = \frac{3-x}{3}$$

Kerrotaan ristiin.

$$3x = 4(3-x)$$

$$3x = 12 - 4x$$

$$7x = 12 \qquad \mid : 7$$

$$x = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$$

sivun pituuden tarkka arvo

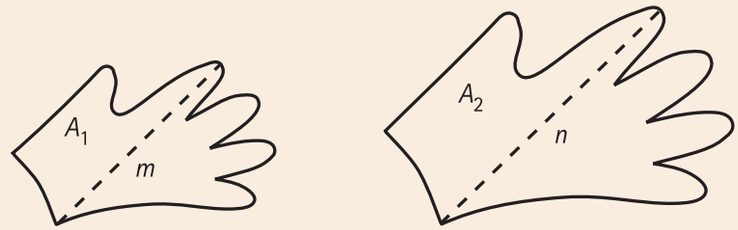
VASTAUS $1\frac{5}{7}$

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on yhdenmuotoisuussuhteen (mittakaavan) neliö.

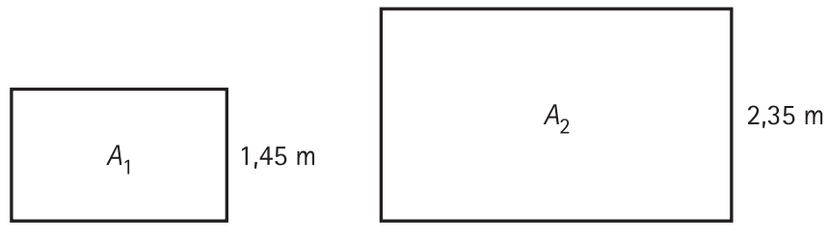
Jos kuviot ovat yhdenmuotoiset suhteessa $\frac{m}{n}$, kuvioiden pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$



ESIMERKKI 3 Kahden Suomen lipun korkeudet ovat 1,45 metriä ja 2,35 metriä. Kuinka monta prosenttia pienemmän lipun pinta-ala on suuremman lipun pinta-alasta?

RATKAISU Kaikki Suomen liput ovat keskenään yhdenmuotoiset. Kahden lipun pinta-alojen suhde on niiden yhdenmuotoisuussuhteen neliö. Suhde voidaan laskea minkä tahansa kahden toisiaan vastaavan janan avulla.



$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{1{,}45}{2{,}35}\right)^2$$

Pinta-alojen suhde on korkeuksien suhteen neliö.

$$\approx 0{,}381 = 38{,}1\ \%$$

VASTAUS 38,1 %

ESIMERKKI 4 Kartalla, jonka mittakaava on $1 : 20\,000$, pellon pinta-ala on $37\ \text{cm}^2$. Määritä pellon pinta-ala hehtaareina.

RATKAISU Karttakuvan pinta-alan suhde pellon pinta-alaan A on mittakaavan neliö.

$$\frac{37\ \text{cm}^2}{A} = \left(\frac{1}{20\,000}\right)^2 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{37\ \text{cm}^2}{A} = \frac{1}{20\,000^2} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$A = 20\,000^2 \cdot 37\ \text{cm}^2 \approx 1{,}5 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2 \qquad 1\ \text{m}^2 = 100\ \text{cm} \times 100\ \text{cm} = 10\,000\ \text{cm}^2$$

$$= 1{,}5 \cdot 10^6\ \text{m}^2 = 1\,500\,000\ \text{m}^2 \qquad 1\ \text{ha} = 10\,000\ \text{m}^2$$

$$= 150\ \text{ha}$$

VASTAUS 150 ha

Harjoituksia

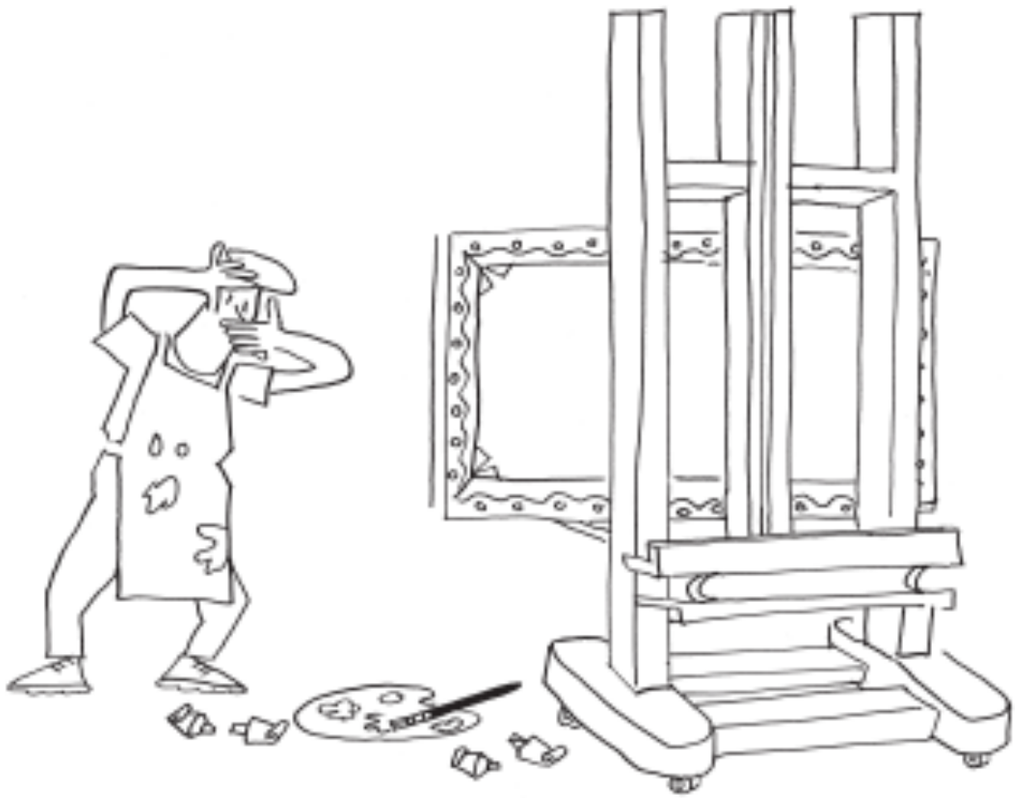
173. Kaupunkien etäisyys kartalla, jonka mittakaava on 1 : 4 500 000, on 6,8 cm. Mikä kaupunkien etäisyys on?

174. Taiteilija hahmottelee maalausta kankaalle, jonka leveys on 83 cm ja korkeus 51 cm. Hän haluaa rajata oikeasta reunasta kankaan korkuisen alueen, joka on yhdenmuotoinen koko kankaan kanssa. Kuinka leveä alueen tulee olla?

175. Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 2 ja 5 ja erisuuntaisten sivujen pituudet 3 ja 4. Erisuuntaisia sivuja jatketaan, kunnes jatkeet leikkaavat toisensa. Kuinka pitkä jatke piirretään sivulle, jonka pituus on 4?

176. Yhdenmuotoisten säilyketölkkien korkeudet ovat 7,8 cm ja 10,3 cm. Kuinka monta prosenttia vähemmän peltiä tarvitaan pienempään tölkkiin?

177. Tontin pinta-ala on 19 aaria. Mikä tontin pinta-ala on mittakaavassa 1 : 2 000 piirretyssä asemakaavakartassa?



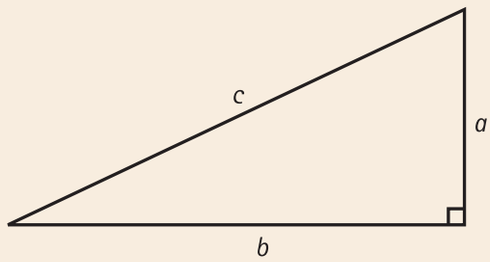
Pythagoraan lause

Pythagoraan lause

Suorakulmaisen kolmion kateettien pituuksien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan pituuden neliö.

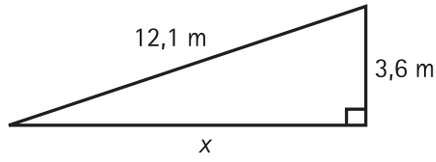
Kuvion merkinnöin:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



ESIMERKKI 1 Tasamaalla kasvava 15,7 metrin pituinen puu katkesi 3,6 metrin korkeudelta, ja latvaosa kaatui maahan irtoamatta tyviosasta. Kuinka kaukana puun tyvestä latva osui maahan?

RATKAISU Tyviosa, maahan taittunut latvaosa ja jana latvasta tyveen muodostavat suorakulmaisen kolmion. Latvaosan pituus on $15{,}7\text{ m} - 3{,}6\text{ m} = 12{,}1\text{ m}$.



Ratkaistaan kolmion toisen kateetin pituus x.

$x^2 + 3{,}6^2 = 12{,}1^2$ Kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö.

$x^2 = 12{,}1^2 - 3{,}6^2$

$x^2 = 133{,}45$

$x = \sqrt{133{,}45} \approx 11{,}6\text{ (m)}^*$

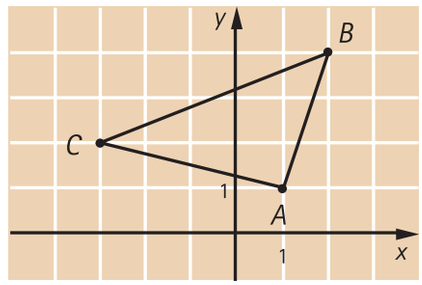
VASTAUS 11,6 m

---

* Välitulosta 133,45 ei tarvitse välttämättä kirjata, vaan laskimella voidaan laskea suoraan (sulkeita käyttäen) lausekkeen $\sqrt{12{,}1^2 - 3{,}6^2}$ arvo. Voidaan myös ensin laskea $12{,}1^2 - 3{,}6^2$ ja sen jälkeen neliöjuuri laskimen [Ans] -näppäimen avulla.

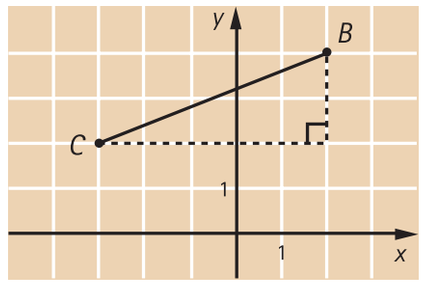
ESIMERKKI 2

Kolmion ABC kärkipisteet ovat $A(1, 1)$, $B(2, 4)$ ja $C(-3, 2)$. Laske
a) sivun BC pituus
b) kolmion ABC pinta-ala.



RATKAISU

a) Sivu BC on hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Kateettien pituudet ovat 5 ja 2.



Ratkaistaan sivun BC pituus x.

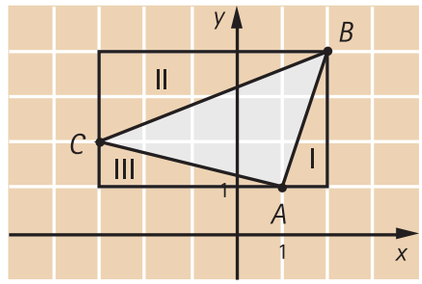
$$x^2 = 5^2 + 2^2$$

$$x^2 = 29$$

$$x = \sqrt{29} \approx 5{,}4$$

Varsinainen vastaus on tarkka arvo $\sqrt{29}$. Likiarvo lasketaan havainnollistukseksi ja tarkistukseksi.

b) Pinta-alan laskemiseksi kolmio kehystetään suorakulmiolla, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.



Suorakulmion alasta vähennetään kolmen suorakulmaisen kolmion ala.

Suorakulmion pinta-ala on $5 \cdot 3 = 15$.

Kolmioiden pinta-alat ovat

$$\text{I: } \frac{1 \cdot 3}{2} = 1{,}5 \qquad \text{II: } \frac{2 \cdot 5}{2} = 5 \qquad \text{III: } \frac{4 \cdot 1}{2} = 2.$$

Kolmion ABC pinta-ala on $15 - 1{,}5 - 5 - 2 = 6{,}5$.

VASTAUS

a) $\sqrt{29} \approx 5{,}4$ b) $6{,}5$

Harjoituksia

178. Suorakulmion kahden sivun pituus on 3 ja lävistäjän pituus 4. Laske suorakulmion kahden muun sivun pituuden tarkka arvo.

179. Tasamaalla kasvava puu katkesi 4,2 metrin korkeudelta. Latvaosa kaatui maahan irtoamatta tyviosasta, ja latva osui maahan 7,8 metrin etäisyydellä tyvestä. Laske puun pituus.

180. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 7,26 cm ja kannan pituus 8,42 cm. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

181. Ensin purjehdittiin itään ja sitten kaksinkertainen matka etelään. Näin tultiin 17 kilometrin päähän lähtöpaikasta. Kuinka pitkä matka oli purjehdittu?

182. Olkoon $A = (-3, 5)$ ja $B = (2, -1)$. Laske a) pisteen A etäisyys origosta b) janan AB pituus.

183. Kolmion kärkipisteet ovat $(-3, 1)$, $(2, 3)$ ja $(0, -2)$. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

Trigonometria

Tangentti, sini ja kosini

Suorakulmaisessa kolmiossa, jonka terävä kulma on α,

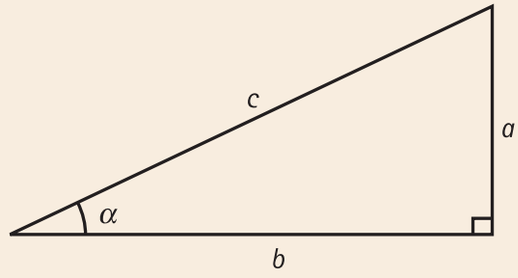
- kulman α *tangentti* on $\dfrac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}$
- kulman α *sini* on $\dfrac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$
- kulman α *kosini* on $\dfrac{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$.

Viereisessä kuviossa on

$\tan \alpha = \dfrac{a}{b}$

$\sin \alpha = \dfrac{a}{c}$

$\cos \alpha = \dfrac{b}{c}$.

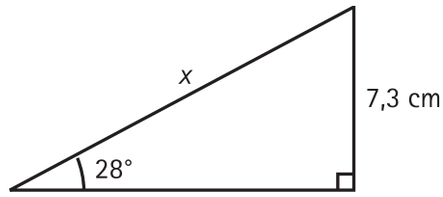


Jos tiedetään suorakulmaisen kolmion yhden sivun pituus ja toisen terävän kulman suuruus, niin trigonometristen funktioiden avulla voidaan ratkaista muiden sivujen pituudet.

Trigonometristen funktioiden avulla voidaan myös määrittää suorakulmaisen kolmion terävien kulmien suuruudet, jos tunnetaan kolmion kahden sivun pituudet.

ESIMERKKI 1 Suorakulmaisen kolmion toisen terävän kulman suuruus on 28°, ja kolmion kateeteista lyhyemmän pituus on 7,3 cm. Laske kolmion hypotenuusan pituus.

RATKAISU Koska 28°:n kulma on kolmion terävistä kulmista pienempi, kulman vastainen kateetti on kolmion lyhyempi kateetti.*



$$\sin 28° = \frac{7{,}3}{x} \qquad \big| \cdot x$$

Voidaan myös kirjoittaa yhtälö muotoon $\frac{\sin 28°}{1} = \frac{7{,}3}{x}$ ja kertoa ristiin.

$$x \cdot \sin 28° = 7{,}3 \qquad \big| : \sin 28°$$

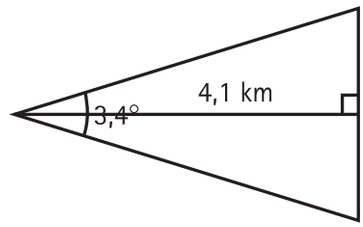
$$x = \frac{7{,}3}{\sin 28°} \approx 15{,}5 \text{ (cm)}$$

VASTAUS 15,5 cm

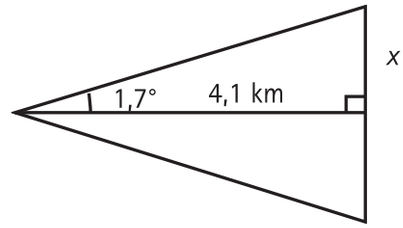
* Mallikuvioon kannattaa piirtää tunnettu terävä kulma likimain oikean kokoisena, jolloin kuviota voidaan käyttää apuna päättelyissä ja ratkaisun tarkistamisessa.

ESIMERKKI 2 Laiva näkyy 4,1 km:n etäisyydeltä suoraan sivusta katsottuna 3,4°:n kulmassa. Kuinka pitkä laiva on?

RATKAISU Laiva ja katsojasta laivan ääripäihin piirretyt janat muodostavat tasakylkisen kolmion, jonka huippukulma on 3,4° ja korkeus 4,1 km.



Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman. Lasketaan kolmion kannan puolikkaan pituus.

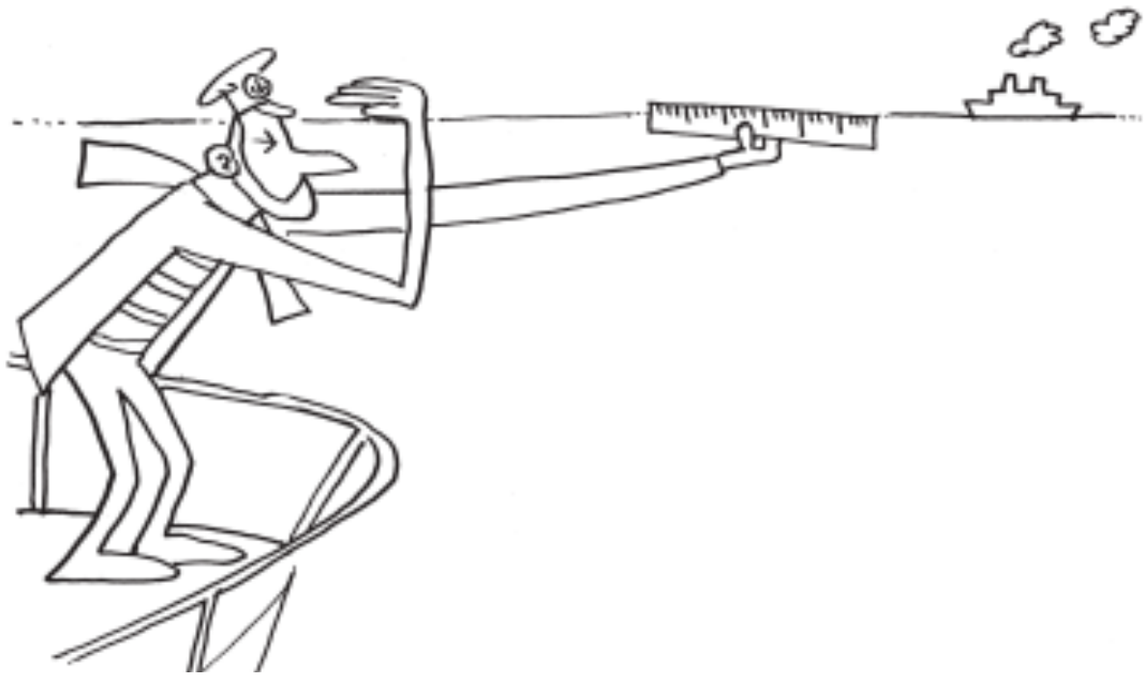


$$\tan 1{,}7° = \frac{x}{4{,}1} \qquad \big| \cdot 4{,}1$$

$$x = 4{,}1 \cdot \tan 1{,}7° \approx 0{,}12169$$

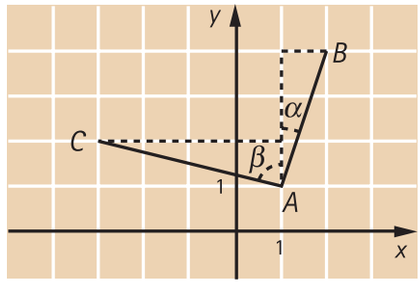
Laivan pituus on $2x = 2 \cdot 4{,}1 \cdot \tan 1{,}7° \approx 0{,}24$ (km).

VASTAUS 240 m



ESIMERKKI 3 $A(1, 1)$, $B(2, 4)$ ja $C(-3, 2)$ ovat koordinaatiston kolme pistettä. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella kulman BAC suuruus.

RATKAISU Kulma BAC on kuvioon täydennettyjen kulmien α ja β summa. Kulmien α ja β suuruudet voidaan laskea trigonometrian avulla.



$$\tan \alpha = \frac{1}{3}$$

Laskimesta riippuen näppäillään
[tan^{-1}] [(] 1 [÷] 3 [)] [=] tai
1 [÷] 3 [=] [tan^{-1}] [=].

$$\alpha \approx 18{,}435°$$

$$\tan \beta = \frac{4}{1}$$

$$\beta \approx 75{,}964°$$

$$\sphericalangle BAC \approx 18{,}435° + 75{,}964° \approx 94{,}4°$$

VASTAUS 94,4°

Harjoituksia

184. Tikkaiden yläpää on seinällä 4,2 metrin korkeudella, ja tikkaat muodostavat maanpinnan kanssa 68°:n kulman. Kuinka kaukana seinästä tikkaiden alapää on?

185. Lentokoneen valot näkyvät lennonjohtotornista 71°:n korkeudella, ja tutkan mukaan koneen etäisyys tornista on 8 600 metriä. Kuinka korkealla lentokone lentää?

186. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 16,1 cm ja pitempi kateetti 13,3 cm. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella kolmion pienemmän terävän kulman suuruus.

187. Tasakylkisen kolmion kantakulmien suuruus on 68,1° ja kannan pituus 28,3 cm. Kuinka pitkät kolmion kyljet ovat?

188. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 19,0 cm ja 11,2 cm, ja näiden sivujen välisen kulman suuruus on 28,3°. Laske kolmion pinta-ala.

189. Olkoon $A = (5, 1)$, $B = (1, -1)$ ja $C = (2, 4)$. Laske kulman BAC suuruus asteen sadasosan tarkkuudella.

Monikulmioita

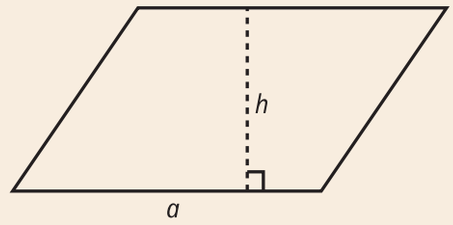
Suunnikas

Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.

Suunnikkaan pinta-ala lasketaan kaavalla

$$A = ah,$$



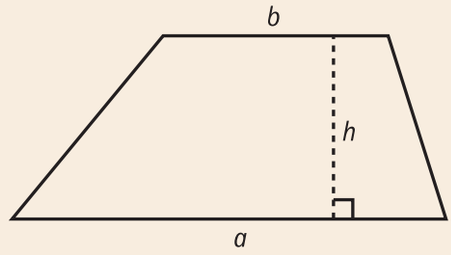
missä
a on suunnikkaan sivun pituus,
h on sivulle a (tai sen jatkeelle) piirretty suunnikkaan korkeus.

Puolisuunnikas

Puolisuunnikas on nelikulmio, jossa on kaksi yhdensuuntaista sivua.

Puolisuunnikkaan pinta-ala lasketaan kaavalla

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$



missä
a ja b ovat puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet,
h on puolisuunnikkaan korkeus.

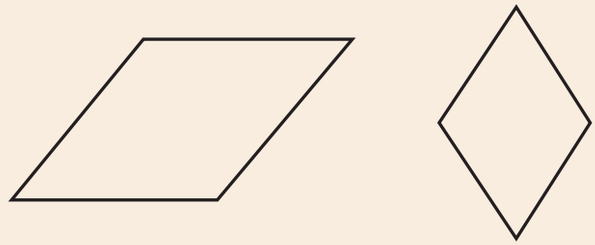
Puolisuunnikkaan pinta-ala on siis yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvon ja yhdensuuntaisten sivujen etäisyyden (puolisuunnikkaan korkeuden) tulo.*

* Suunnikkaan ja puolisuunnikkaan alan kaavat, kuten useimmat muutkin geometrian kaavat, ovat taulukkokirjassa.

Neljäkäs

Neljäkäs on nelikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät.

Neljäkkään vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, eli neljäkäs on suunnikas.



ESIMERKKI 1 Suunnikkaan sivujen pituudet ovat 5,67 cm ja 8,19 cm, ja suunnikkaan pinta-ala on 36,42 cm^2. Laske suunnikkaan kulmien suuruudet asteen kymmenesosan tarkkuudella.

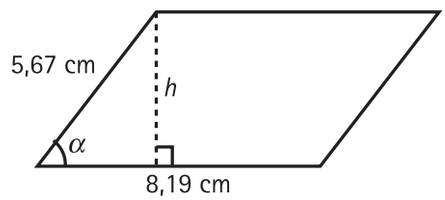
RATKAISU Suunnikkaan pinta-ala on $A = ah$, missä a on suunnikkaan sivun pituus ja h sivulle piirretyn korkeusjanan pituus.

Lasketaan 8,19 cm:n sivulle piirretyn korkeusjanan pituus.

$$8{,}19h = 36{,}42 \qquad | : 8{,}19$$

$$h = \frac{36{,}42}{8{,}19} \approx 4{,}44689 \text{ (cm)}$$

Ratkaistaan suunnikkaan terävän kulman α suuruus.



$$\sin\alpha = \frac{h}{5{,}67}$$

$$\sin\alpha = \frac{4{,}44689}{5{,}67}$$

$$\alpha \approx 51{,}7°$$

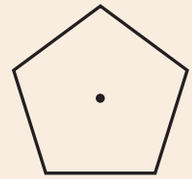
Välituloksen sijasta lausekkeeseen voidaan näppäillä laskimessa oleva h:n arvo [Ans] -näppäimellä.

Suunnikkaan terävät kulmat ovat yhtä suuret, ja suunnikkaan tylppien kulmien suuruus on $180° - 51{,}7° = 128{,}3°$.

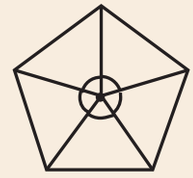
VASTAUS 51,7° ja 128,3°

Säännöllinen monikulmio

Säännöllisen monikulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat yhtä suuret.



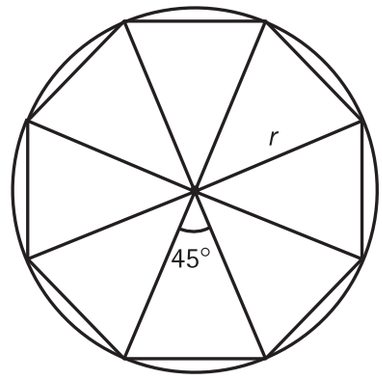
Kun säännöllisen n-kulmion kärjet yhdistetään keskipisteeseen, muodostuu n kappaletta samanlaisia tasakylkisiä kolmioita.



ESIMERKKI 2 Kuinka monta prosenttia ympyrän sisään piirretyn säännöllisen kahdeksankulmion piiri on ympyrän kehän pituudesta?

RATKAISU Merkitään ympyrän sädettä r.*

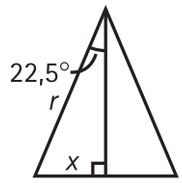
Kun ympyrän keskipiste yhdistetään ympyrän sisään piirretyn kahdeksankulmion kärkiin, muodostuu kahdeksan samanlaista tasakylkistä kolmiota. Kolmioiden huippukulma on $\frac{360°}{8} = 45°$.



---

* Sanonta ”ympyrän sisään piirretty monikulmio” tarkoittaa monikulmiota, jonka kärjet ovat ympyrän kehällä.

Olkoon x kolmion kannan puolikas.



$$\sin 22{,}5° = \frac{x}{r} \qquad | \cdot r$$

$$x = r \sin 22{,}5°$$

Kolmion kannan pituus on $2x = 2r \sin 22{,}5°$.

Kahdeksankulmion piiri on $p_1 = 8 \cdot 2r \sin 22{,}5° = 16r \sin 22{,}5°$.

Ympyrän kehän pituus on $p_2 = 2\pi r$.

Kahdeksankulmion piirin suhde ympyrän kehän pituuteen on

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{16\cancel{r}^{1} \sin 22{,}5°}{2\pi\cancel{r}_{1}} = \frac{16 \sin 22{,}5°}{2\pi} \approx 0{,}974 = 97{,}4\ \%.$$

VASTAUS 97,4 %

Harjoituksia

190. Suunnikkaan sivujen pituudet ovat 4,2 cm ja 6,3 cm, ja suunnikkaan tylpän kulman suuruus on 123°. Laske suunnikkaan pinta-ala.

191. Tasakylkisen puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 20 cm ja 30 cm ja kylkien pituus 13 cm. Laske puolisuunnikkaan korkeus ja pinta-ala.

192. Kuinka suuret säännöllisen kahdeksankulmion kulmat ovat?

193. Ympyrän säde on 1. Laske ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 20-kulmion piiri neljän desimaalin tarkkuudella.

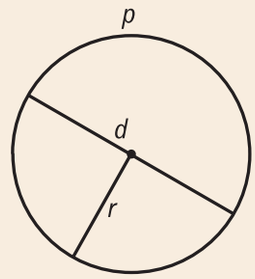
Ympyrä

Ympyrä muodostuu tason pisteistä, jotka ovat samalla etäisyydellä (säde) kiinteästä pisteestä (keskipiste).

Ympyrän kehän pituus

Luku π on ympyrän kehän pituuden ja halkaisijan suhde.

Siten ympyrän kehän pituus on



$$p = \pi d,$$

missä d on ympyrän halkaisija,

eli

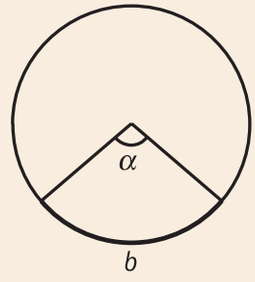
$$p = 2\pi r,$$

missä r on ympyrän säde.

Kaaren pituus

Ympyrän kaaren pituuden suhde ympyrän kehän pituuteen on yhtä suuri kuin kaaren keskuskulman α suhde täysikulmaan $360°$:

$$\frac{b}{p} = \frac{\alpha}{360°},$$



missä

b on kaaren pituus,
α on kaaren keskuskulma,
p on ympyrän kehän pituus.

Jos tunnetaan ympyrän säde r ja keskuskulma α, niin kaaren pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r.$$

Ympyrän pinta-ala

Ympyrän pinta-ala lasketaan kaavalla

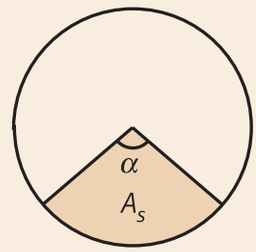
$$A = \pi r^2,$$

missä r on ympyrän säde.

Sektorin pinta-ala

Sektorin pinta-alan suhde ympyrän pinta-alaan on yhtä suuri kuin sektorin keskuskulman α suhde täysikulmaan $360°$:

$$\frac{A_S}{A_Y} = \frac{\alpha}{360°},$$



missä

A_S on sektorin pinta-ala,
A_Y on ympyrän pinta-ala,
α on sektorin keskuskulma.

Jos tunnetaan sektorin keskuskulma α ja ympyrän säde r, niin sektorin pinta-ala on

$$A_S = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2.$$

ESIMERKKI 1 Puun ympärysmitta on 5,42 metriä. Laske puun poikkileikkauksen pinta-ala.

RATKAISU Ratkaistaan ympyrän säde r.

$2\pi r = 5{,}42 \qquad | : 2\pi$

$r = \dfrac{5{,}42}{2\pi} \approx 0{,}86262 \text{ (m)}$

Tehtävän tulokseen tarvitaan kolmen numeron tarkkuus, joten välitulos lasketaan vähintään viiden numeron tarkkuudella.

Poikkileikkauksen pinta-ala on

$A = \pi \cdot r^2 \approx \pi \cdot 0{,}86262^2$

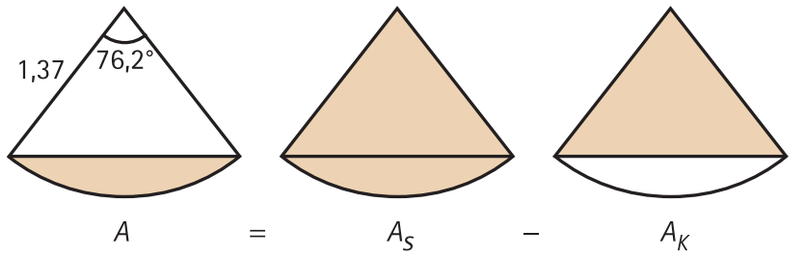
$\approx 2{,}34 \text{ (m}^2\text{)}.$

Välituloksen sijasta lausekkeeseen voidaan näppäillä laskimessa oleva r:n arvo Ans -näppäimellä.

VASTAUS $2{,}34 \text{ m}^2$

ESIMERKKI 2 Ympyrän säde on 1,37 metriä. Ympyrästä erotetaan kaari, jonka keskuskulma on 76,2°. Kaari ja sen päätepisteitä yhdistävä jänne rajaavat ympyrän segmentin. Laske segmentin pinta-ala.

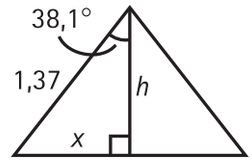
RATKAISU Segmentin pinta-ala saadaan vähentämällä sektorin pinta-alasta säteiden ja jänteen rajaaman tasakylkisen kolmion pinta-ala.



Sektorin pinta-ala on

$$A_S = \frac{76{,}2°}{360°} \cdot \pi \cdot 1{,}37^2 \approx 1{,}24808 \text{ (m}^2\text{)}. \qquad A_S = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

Ratkaistaan tasakylkisen kolmion kannan puolikas x ja kolmion korkeus h.



$$\sin 38{,}1° = \frac{x}{1{,}37} \qquad \big| \cdot 1{,}37$$

$$x = 1{,}37 \cdot \sin 38{,}1° \approx 0{,}84534$$

$$\cos 38{,}1° = \frac{h}{1{,}37} \qquad \big| \cdot 1{,}37$$

$$h = 1{,}37 \cdot \cos 38{,}1° \approx 1{,}07810$$

Tasakylkisen kolmion pinta-ala on

$$A_K = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = xh = 1{,}37 \cdot \sin 38{,}1° \cdot 1{,}37 \cdot \cos 38{,}1° \approx 0{,}91136 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Segmentin pinta-ala on

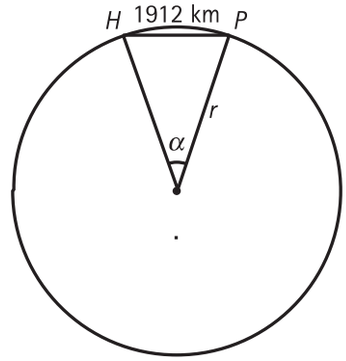
$$A = A_S - A_K \approx 1{,}24808 - 0{,}91136 \approx 0{,}337 \text{ (m}^2\text{)}.$$

VASTAUS $0{,}337 \text{ m}^2$

ESIMERKKI 3 Helsingin ja Pariisin etäisyys on 1 912 km. Kuinka pitkä olisi kaupunkeja yhdistävä suora tunneli? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.

RATKAISU

Paikkakuntien välinen etäisyys on niiden kautta kulkevan maapallon isoympyrän kaaren pituus. Isoympyrän keskipiste on maapallon keskipiste.



Tunneli on paikkakuntia yhdistävä jänne.

Lasketaan keskuskulman α suuruus.

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{1\,912}{40\,000}$$

Keskuskulman α suhde täysikulmaan $360°$ on yhtä suuri kuin kaaren pituuden suhde ympyrän kehän pituuteen.

$$40\,000\,\alpha = 1912 \cdot 360°$$

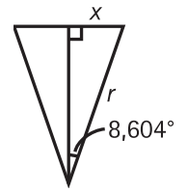
$$\alpha = \frac{1912 \cdot 360°}{40000} = 17{,}208°$$

Lasketaan ympyrän säteen pituus.

$$2\pi r = 40\,000$$

$$r = \frac{40\,000}{2\pi} \approx 6\,366{,}20 \text{ (km)}$$

Ratkaistaan jänteen puolikas x suorakulmaisesta kolmiosta, jossa terävä kulma on



$$\frac{\alpha}{2} = \frac{17{,}208°}{2} = 8{,}604°.$$

$$\sin 8{,}604° = \frac{x}{r} \qquad \big| \cdot r$$

$$x = r \sin 8{,}604°$$

Tunnelin pituus $2x = 2r \sin 8{,}604° \approx 2 \cdot 6366{,}20 \cdot \sin 8{,}604°$
$\approx 1\,905$ (km).

VASTAUS 1 905 km

Harjoituksia

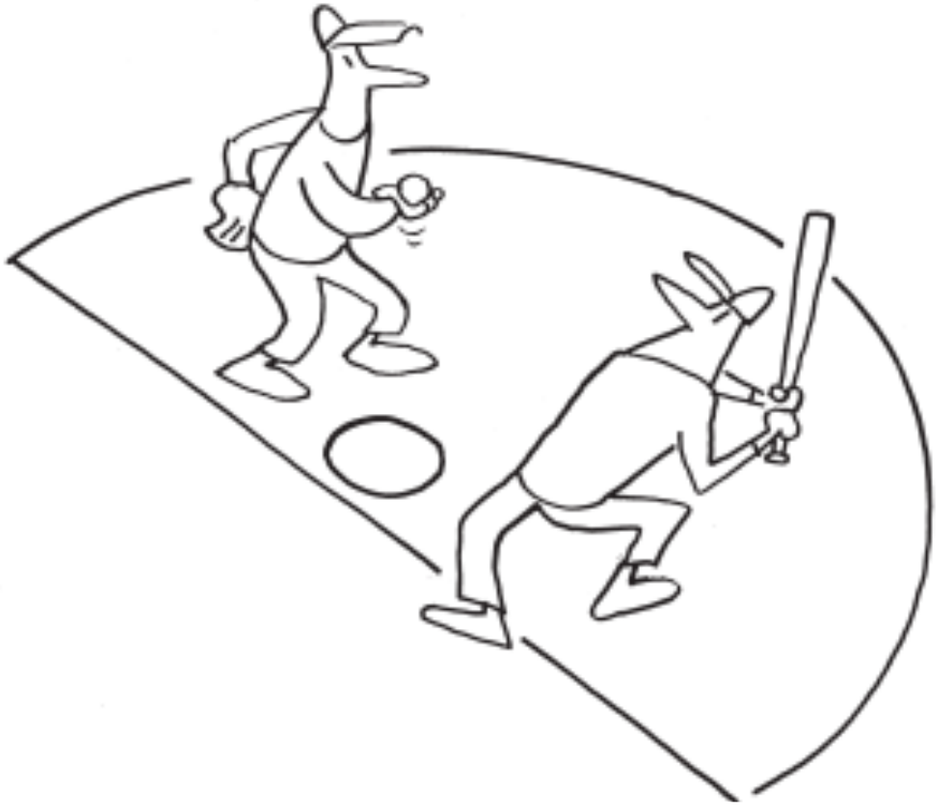
194. Ympyrän keskipiste on origossa, ja ympyrän säde on 8. Onko piste $(-7, 4)$ ympyrän kehällä, ympyrän sisällä vai ympyrän ulkopuolella?

195. Puoliympyrän pinta-ala on $8{,}6\ \text{m}^2$. Laske puoliympyrän piiri.

196. Kajaani ja Johannesburg sijaitsevat samalla pituuspiirillä $28°$ itäistä pituutta. Kajaanin leveyspiiri on $64°$ pohjoista leveyttä ja Johannesburgin $16°$ eteläistä leveyttä. Mikä Kajaanin etäisyys on Johannesburgista? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.

197. Ympyrältä, jonka halkaisija on 9,46 metriä, on erotettu 8,89 metrin pituinen kaari. Laske kaaren keskuskulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

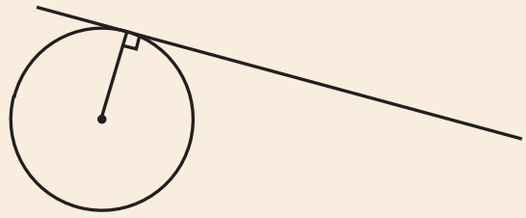
198. Ympyrän säde on 13,0 cm. Ympyrälle on piirretty jänne, jonka pituus on 10,0 cm. Laske jänteen etäisyys ympyrän keskipisteestä ja jänteen päätepisteitä yhdistävän kaaren pituus.



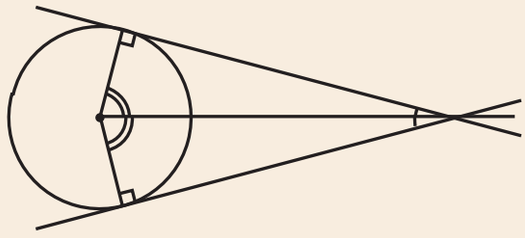
Ympyrän tangentti

Ympyrän *tangentti* on suora, joka kohtaa ympyrän vain yhdessä pisteessä.

Ympyrän tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.



Ympyrän ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan ympyrälle piirtää kaksi tangenttia. Kun kuvioon täydennetään ulkopuolisen pisteen ja ympyrän keskipisteen kautta kulkeva suora ja sivuamispisteisiin piirretyt säteet, muodostuu kaksi samanlaista suorakulmaista kolmiota.

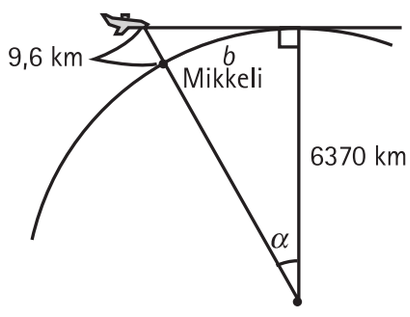


ESIMERKKI 1

Lentokone lentää 9 600 metrin korkeudella Mikkelin yläpuolella. Kuinka etäälle Mikkelistä lentokoneesta katselevan näkökenttä ulottuu? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km ja säde 6 370 km.

RATKAISU

Etäisyys Mikkelistä on maapallon poikkileikkausympyrän kaaren pituus b. Näkökentän rajana on piste, jossa katsojan kautta piirretty ympyrän tangentti sivuaa ympyrää.



Ratkaistaan keskuskulma α.

$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370 + 9{,}6}$$

$$\alpha \approx 3{,}1436°$$

Kaaren pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 40\,000$$

$$= \frac{3{,}1436°}{360°} \cdot 40\,000$$

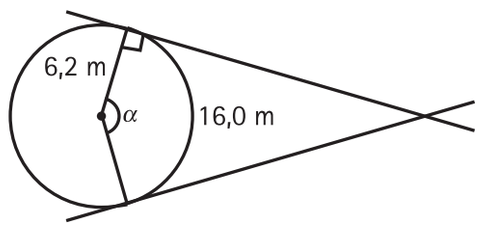
Välituloksen sijasta voidaan lausekkeeseen näppäillä [Ans] -näppäimellä laskimessa oleva α:n arvo.

$$\approx 350 \text{ (km)}.$$

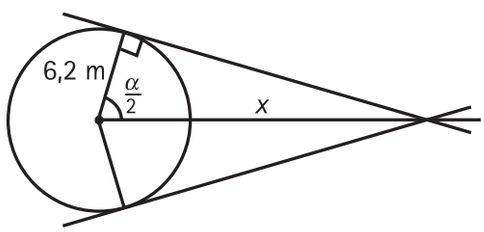
VASTAUS 350 km:n päähän

ESIMERKKI 2 Pyöreän näkötornin läpimitta on 12,4 metriä. Torniin on kiinnitetty 16,0 metrin levyinen mainos. Kuinka kaukana tornista katsojan tulee olla, jotta hän näkisi mainoksen koko leveydeltä?

RATKAISU Mainos on ylhäältä katsottuna ympyrän 16,0 m pitkä kaari. Lähin piste, josta mainoksen voi nähdä kokonaan, on piste, jossa kaaren päätepisteisiin piirretyt ympyrän tangentit leikkaavat toisensa.



Lisätään kuvioon tangenttien leikkauspistettä ja ympyrän keskipistettä yhdistävä jana. Kuviossa x on tangenttien leikkauspisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä.



Ratkaistaan keskuskulman α suuruus.

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{16}{\pi \cdot 12{,}4}$$

Kaaren pituuden suhde kehän pituuteen on yhtä suuri kuin keskuskulman suhde 360°:een.

$$\alpha = \frac{16}{\pi \cdot 12{,}4} \cdot 360° \approx 147{,}860°$$

Tällöin $\frac{\alpha}{2} \approx 73{,}930°$ ja

$$\cos 73{,}930° = \frac{6{,}2}{x} \qquad | \cdot x$$

$$x \cos 73{,}930° = 6{,}2 \qquad | : \cos 73{,}930°$$

$$x = \frac{6{,}2}{\cos 73{,}930°} \approx 22{,}4 \text{ (m)}.$$

Leikkauspisteen etäisyys tornista on $22{,}4 - 6{,}2 = 16{,}2$ (m).

VASTAUS vähintään 16,2 metrin etäisyydellä

Harjoituksia

199. Kuinka kauas merelle voi nähdä merenrantatalon ylimmästä kerroksesta 18 metrin korkeudelta merenpinnasta? Laske suoraviivainen etäisyys katsojan silmistä etäisimpään kohtaan. Maapallon säde on 6 370 km.

200. Avaruusalus on 930 kilometrin etäisyydellä Maasta. Kuinka suuressa kulmassa maapallo näkyy aluksesta? Maapallon säde on 6 370 km.

201. Koripallon säde on 12,1 cm. Miltä etäisyydeltä katsottuna koripallo näkyy Kuun kokoisena eli 0,524°:n kulmassa?

202. Lentokone on Tampereen yläpuolella 5 700 metrin korkeudella. Kuinka etäälle Tampereelta lentäjien näkökenttä ulottuu? Maapallon säde on 6 370 km ja ympärysmitta 40 000 km.

203. Matkapuhelinmasto sijaitsee mäellä, joka kohoaa 32 metriä läheisen järven pintaa korkeammalle. Maston korkeus on 120 metriä. Missä kulmassa (vaakasuoraan tasoon nähden) järven vastakkaisella rannalla mastosta 4,5 kilometrin päässä oleva katsoja näkee maston huipussa olevan punaisen valon? Vastaus 0,1 asteen tarkkuudella.
(Ylioppilaskoe, k. 2002)

204. Kellohametta valmistettaessa tarvitaan kahden samankeskisen ympyräviivan rajoittama pala kangasta. Sisempi ympyrä muodostaa hameen vyötärön ja ulompi helman. Tytölle, jonka vyötärön ympärysmitta on 60 cm, halutaan ommella 60 cm pitkä kellohame. Kuinka leveää kankaan pitää vähintään olla, jotta siitä voitaisiin leikata hameeseen tarvittava ympyrärenkaan muotoinen pala? Saumavaroja ja päärmeitä ei tarvitse ottaa huomioon. (Ylioppilaskoe, k. 1998)

205. Tasaisella maalla sijaitseva pistemäinen valonheitin valaisee 12 metrin etäisyydellä olevaa seinämää. Henkilö, jonka pituus on 175 cm, etenee valonheittimeltä seinämää kohti nopeudella 95 m/min. Kuinka pitkä on henkilön varjo seinämällä, kun hän on 4,0 metrin etäisyydellä valonheittimestä? Kuinka paljon varjo lyhenee hänen jatkettuaan kulkuaan kohden seinää edelleen kahden sekunnin ajan? (Ylioppilaskoe, s. 2005)

206. Metsäpalstan pinta-alaksi peruskartalla mitattiin 2,9 cm^2, missä mittausvirhe on enintään 0,1 cm^2. Laske palstan koko hehtaareina ja sen maksimivirhe, kun peruskartan mittakaava on 1 : 20 000.
(Ylioppilaskoe, k. 2004)

207. Katuvalaisimen kannatinvaijeri on kiinnitetty 34,50 m leveän kadun vastakkaisilla puolilla olevien talojen seiniin 6,50 m korkeudelle maasta. Lamppu riippuu vaijerista sen keskikohdalta, joka on 1,10 m vaijerin päitä alempana, ja vetää vaijerin puolikkaat likimain janoiksi. Kuinka pitkä vaijeri on, ja kuinka suuren kulman vaijerin puoliskot muodostavat keskenään?
(Ylioppilaskoe, s. 1996)

208. Neliön $ABCD$ sivulla AB on sellainen piste E, että $AE = 1$ ja $ED = 3$. Laske neliön a) sivun pituus, b) pinta-ala, c) lävistäjän pituus. Anna vastaukset tarkkoina arvoina. (Ylioppilaskoe, k. 2006)

209. Kolmion kärjet ovat pisteissä $A = (-2, 2\sqrt{2})$, $B = (-2, -\sqrt{2})$, $C = (3, \sqrt{2})$. Laske kolmion kulmien suuruudet 0,1 asteen tarkkuudella.
(Ylioppilaskoe, s. 2000)

210. Ajatellaan, että Helsingistä Brysseliin kaivetaan liikennetunneli, joka yhdistää kaupungit suoraviivaisesti maapallon jännettä pitkin. Miten syvällä on tunnelin syvin kohta? Kuinka monen asteen kaltevuudessa tunneliin ajetaan sen kummassakin päätepisteessä? Maapallon säde on 6 370 km. Helsingin ja Brysselin välinen lyhin etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna on 1 650 km. (Ylioppilaskoe, s. 2001)

211. Helsingin ja Moision keskustat sijaitsevat samalla pituuspiirillä $24°56'$ itäistä pituutta, Helsingin keskusta leveyspiirillä $60°9'$ pohjoista leveyttä ja Moision $62°26'$ pohjoista leveyttä. a) Kuinka kaukana keskustat ovat toisistaan? b) Kuinka korkealla Moision yläpuolella olevasta lentokoneesta voisi periaatteessa kirkkaalla säällä nähdä Helsinkiin? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km. (Ylioppilaskoe, k. 2000)

212. Lieriön muotoisen tölkin ympärysmitta on 240 mm. Tölkin kylkeen liimataan suorakulmion muotoinen nimilappu, jonka korkeus on 60 mm. Kun nimilappua katsotaan etäältä, se näyttää neliön muotoiselta. Kuinka leveä nimilappu on?

213. Suorakulmaisen kolmion ABC kateetin AC pituus on 8,6 cm ja kateetin BC pituus 5,8 cm. Kateetilla AC on piste D siten, että $DA = DB$. Määritä janojen AB ja CD pituudet. (Ylioppilaskoe, k. 2001)

214. Ympyränmuotoisen lammikon keskellä on pystysuora tanko, jonka yläpää ulottuu 183 cm vedenpinnan yläpuolelle. Kun tanko taittuu pohjasta, se ylettyy lammikon reunalle siten, että yläpäästä on 76 cm ilmassa. Tangon alapää jää entiselle paikalleen. Kuinka syvä lammikko on, kun sen piiri on 17,40 m? (Ylioppilaskoe, k. 1996)

215. Kolmion muotoisen viheralueen kaksi lyhintä sivua ovat 70,0 m ja 86,5 m. Jälkimmäisen vastainen kulma on $35{,}0°$. Laske viheralueen muiden kulmien suuruudet ja alueen pinta-ala. Piirrä kuvio. (Ylioppilaskoe, s. 2003)

216. Ympyrän sisään (kärjet ympyrän kehällä) piirretään säännöllinen 12-sivuinen monikulmio. Määritä monikulmion piirin pituus ympyrän säteen r avulla lausuttuna. Jos ympyrän kehän pituus korvataan monikulmion piirin pituudella, niin kuinka monen numeron tarkkuudella luvun π arvo saadaan tällä tavalla laskettua? (Ylioppilaskoe, s. 2000)

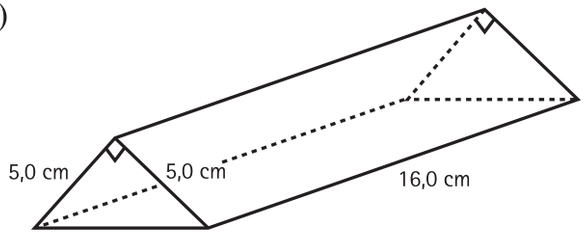
217. Purjehdittaessa näkyi majakka suoraan veneen edessä $2°$:n kulmassa veden pintaan nähden. Kun oli edetty majakkaa kohti 250 m, se näkyi $3°$:n kulmassa. Kuinka kaukana vene oli nyt majakasta, ja mikä oli majakan korkeus? (Ylioppilaskoe, s. 1998)

218. Tikapuut nojaavat seinään niin, että alapää on 2,8 metrin etäisyydellä seinästä. Kun alapäätä siirretään seinästä poispäin 1,9 metriä, yläpää laskeutuu 1,0 metriä. Kuinka pitkät tikapuut ovat?

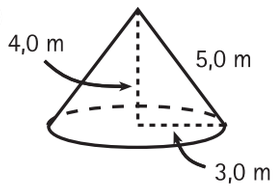
Avaruusgeometria

1. Laske kappaleen tilavuus.

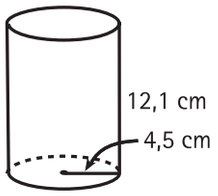
a)



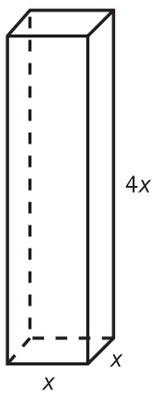
b)



2. Laske lieriön vaipan pinta-ala.



3. Suorakulmaisen särmiön muotoisen pakkauksen tilavuus on yksi litra ja mittasuhteet kuvion mukaiset. Laske pohjasärmän pituus x millimetrin tarkkuudella.



4. Umpinaisen kumipallon halkaisija on 8,4 cm. Kuinka paljon pallo painaa? Kumin tiheys on 0,94 kg/dm^3.

Tehtävien vastaukset ovat seuraavalla sivulla.

Suorakulmainen särmiö

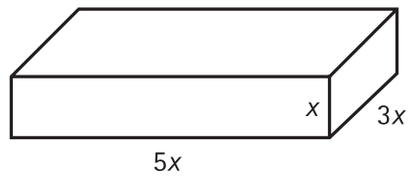
ESIMERKKI 1 Suorakulmaisen särmiön muotoisen rasian pituuden, leveyden ja korkeuden suhde on $5 : 3 : 1$. Rasian vetoisuus on 6 desilitraa. Määritä rasian mitat millimetrin tarkkuudella.

RATKAISU

Rasian tilavuus on

$6 \text{ dl} = 0{,}6 \text{ l} = 0{,}6 \text{ dm}^3$.

Jos särmiön korkeus on x (dm), niin leveys on $3x$ ja pituus $5x$.



Suorakulmaisen särmiön tilavuus on pituuden, leveyden ja korkeuden tulo.

$$5x \cdot 3x \cdot x = 0{,}6$$

$$15x^3 = 0{,}6 \qquad | : 15$$

$$x^3 = 0{,}04$$

$$x = \sqrt[3]{0{,}04} \approx 0{,}34200 \text{ (dm)}$$

Rasian leveys on $3x = 3 \cdot \sqrt[3]{0{,}04} \approx 1{,}03$ (dm), ja rasian pituus on $5x = 5 \cdot \sqrt[3]{0{,}04} \approx 1{,}71$ (dm).

VASTAUS korkeus $3{,}4$ cm, leveys $10{,}3$ cm ja pituus $17{,}1$ cm

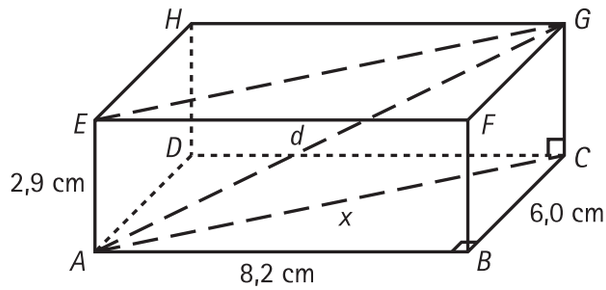
---

TAIDANKO? VASTAUKSET

1. a) 200 cm^3 b) 38 m^3 **2.** 340 cm^2
3. $6{,}3$ cm **4.** 290 g

ESIMERKKI 2 Suorakulmaisen särmiön särmien pituudet ovat 8,2 cm, 6,0 cm ja 2,9 cm. Laske särmiön avaruuslävistäjän pituus.

RATKAISU Lasketaan pohjatahkon $ABCD$ lävistäjän AC pituus x.



$$x^2 = 8{,}2^2 + 6{,}0^2$$

$$x^2 = 103{,}24$$

$$x = \sqrt{103{,}24} \approx 10{,}161 \text{ (cm)}$$

Avaruuslävistäjä AG on suorakulmion $ACGE$ lävistäjä.

$$d^2 = x^2 + 2{,}9^2 \qquad \text{Sijoitetaan } x^2 = 103{,}24.$$

$$d^2 = 103{,}24 + 2{,}9^2$$

$$d^2 = 111{,}65$$

$$d = \sqrt{111{,}65} \approx 10{,}6 \text{ (cm)}$$

VASTAUS 10,6 cm*

---

* Suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituus voidaan laskea myös taulukkokirjan kaavalla $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, missä a, b ja c ovat särmiön särmien pituudet.

Harjoituksia

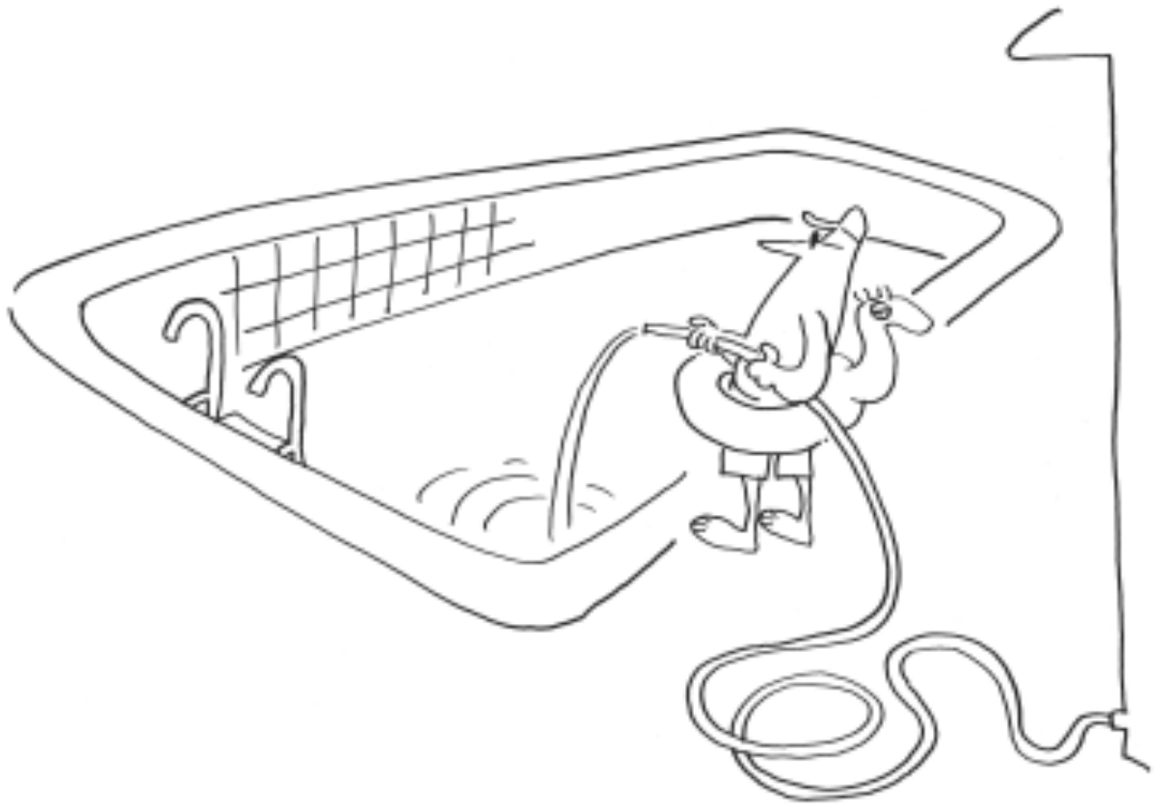
219. Suorakulmion muotoisen uima-altaan pituus on 25,0 metriä ja leveys 12,1 metriä. Sateen aikana altaan vedenpinta nousee 3 mm. Kuinka monta litraa altaan vesimäärä tällöin lisääntyy?

220. Huoneen pituus on 5,20 metriä, leveys 4,25 metriä ja korkeus 3,65 metriä. Peruskorjauksen yhteydessä huoneen pitkiin seiniin ja toiseen päätyseinään lisätään sisäpuolelle 15 cm:n eristekerros ja kattoa lasketaan 42 cm. Kuinka paljon huoneen tilavuus pienenee?

221. Suorakulmaisen särmiön muotoisen perunalaatikon pituuden, leveyden ja korkeuden suhde on 5 : 3 : 2. Laatikon vetoisuus on 120 l. Laske laatikon sisämitat senttimetrin tarkkuudella.

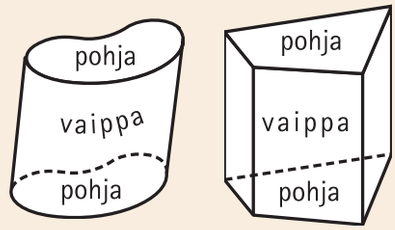
222. Suorakulmaisen särmiön pohja on neliö ja korkeus kaksi kertaa niin suuri kuin pohjasärmän pituus. Särmiön koko pinnan ala on 12,2 cm^2. Laske särmiön tilavuus.

223. Kuinka pitkä ohut sauva mahtuu laatikkoon, jonka sisämitat ovat 82 cm, 45 cm ja 28 cm?

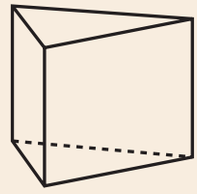


Lieriö

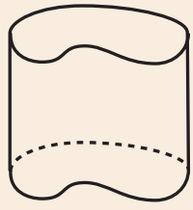
Lieriöllä on *vaippa* ja kaksi samanlaista ja yhdensuuntaista *pohjaa*. Lieriön kaikki pohjien suuntaiset poikkileikkaukset ovat samanlaisia.



Lieriöstä, jonka pohja on monikulmio, käytetään myös nimitystä *särmiö*.



Lieriö, jonka vaippa on kohtisuorassa pohjaa vastaan, on *suora lieriö*.

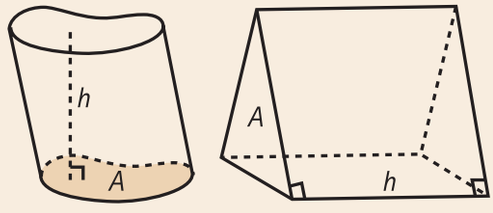


Lieriön tilavuus

Lieriön tilavuus on pohjan pinta-alan ja korkeuden tulo:

$$V = Ah,$$

missä A on lieriön pohjan pinta-ala ja h on lieriön korkeus.

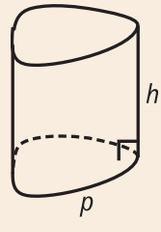


Suoran lieriön vaipan pinta-ala

Suoran lieriön vaipan pinta-ala on lieriön pohjan piirin ja lieriön korkeuden tulo:

$$A = ph,$$

missä p on pohjan piiri ja h lieriön korkeus.



ESIMERKKI 1 Suoran ympyrälieriön tilavuus on $5{,}76\ \text{dm}^3$ ja pohjan halkaisija 22,4 cm. Laske lieriön korkeus.

RATKAISU Ratkaistaan lieriön tilavuuden kaavasta lieriön korkeus.

$$Ah = V \qquad \big| : A$$

$$h = \frac{V}{A}$$

Korkeus on tilavuus jaettuna pohjan pinta-alalla.

Lieriön pohjan säde on $r = \dfrac{22{,}4\ \text{cm}}{2} = 11{,}2\ \text{cm} = 1{,}12\ \text{dm}$ ja pohjan pinta-ala

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 1{,}12^2 \approx 3{,}94081\ \text{dm}^2.$$

Siis

$$h = \frac{V}{A} = \frac{5{,}76}{3{,}94081} \approx 1{,}46\ (\text{dm}).$$

VASTAUS 14,6 cm

Harjoituksia

224. Huoneen pituus on 5,20 m, leveys 4,25 m ja korkeus 3,65 m. Peruskorjauksen yhteydessä huoneen pitkiin seiniin ja toiseen päätyseinään lisätään sisäpuolelle 15 cm:n eristekerros ja kattoa lasketaan 42 cm. Kuinka paljon huoneen seinäpinta-ala pienenee?

225. Ukkoskuuron aikana vettä satoi 8,1 mm. Kuinka monta litraa vettä satoi 2,6 aarin suuruiselle puutarhapalstalle?

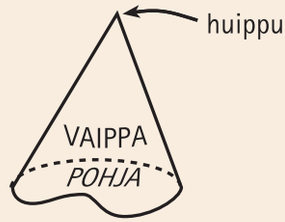
226. Mukin sisäkorkeus on 7,0 cm ja läpimitta samoin 7,0 cm. Mikä mukin vetoisuus on? Anna vastaus desilitroina.
(Ylioppilaskoe, s. 1993)

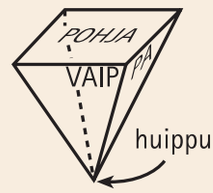
227. Kattilaan, jonka pohjan pinta-ala on $450\ \text{cm}^2$, kaadetaan 3,5 litraa vettä. Kuinka korkea vesikerros kattilaan tulee?

228. Suoran ympyrälieriön muotoisen kahden litran mitta-astian korkeus on 10,0 cm. Määritä astian pohjan pinta-ala, pohjan säde ja vaipan pinta-ala.

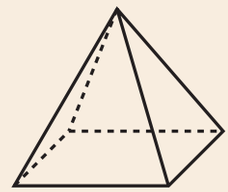
Kartio

Kartiolla on *huippu*, *vaippa* ja *pohja*.



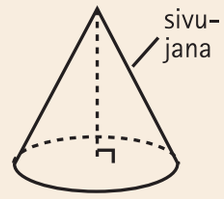


Pyramidi on kartio, jonka pohja on monikulmio.



Nelisivuinen pyramidi

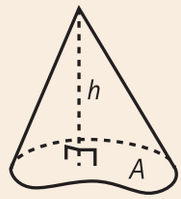
Suoran ympyräkartion huipusta piirretty korkeusjana kulkee pohjaympyrän keskipisteen kautta. Huippua ja pohjaympyrän kehää yhdistävä jana on kartion *sivujana*.



Kartion tilavuus

Kartion tilavuus on kolmasosa pohjan pinta-alan ja korkeuden tulosta:

$$V = \frac{1}{3}Ah,$$

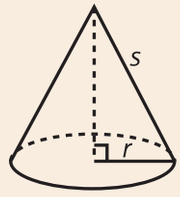


missä
A on kartion pohjan pinta-ala,
h on kartion korkeus.

Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala

Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala lasketaan kaavalla

$$A = \pi rs,$$

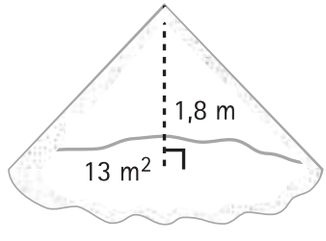


missä
r on pohjaympyrän säde,
s on kartion sivujanan pituus.

ESIMERKKI 1 Vuotavan säiliön alle valunut vilja muodostaa likipitäen kartion muotoisen keon. Keon korkeus on 1,8 metriä, ja keko peittää 13 neliömetrin suuruisen maa-alueen. Laske vuotaneen viljamäärän tilavuus.

RATKAISU Kartion tilavuus on kolmasosa pohjan pinta-alan ja kartion korkeuden tulosta.

$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3} \cdot 13 \cdot 1{,}8 \approx 7{,}8 \text{ (m}^3\text{)}$$



VASTAUS 7,8 m^3

ESIMERKKI 2

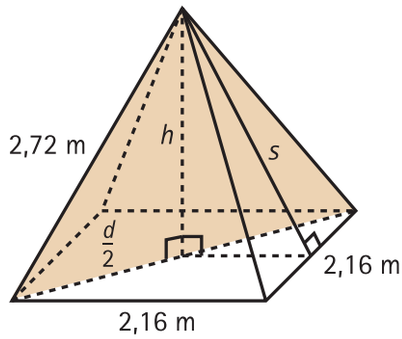
Teltta on muodoltaan suora neliöpohjainen pyramidi, jonka pohjaneliön sivun pituus on 2,16 metriä. Teltan tukikehikko muodostuu neljästä huipun kohdalla yhteenliitetystä 2,72 metrin pituisesta kepistä.

a) Mikä teltan tilavuus on?

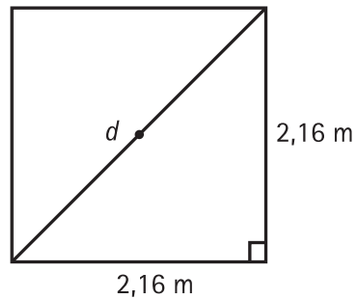
b) Kuinka paljon kangasta teltan kattoon tarvitaan?

RATKAISU

a) Teltan korkeus h voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusa on kartion sivusärmä ja toinen kateetti pohjan lävistäjän d puolikas $\frac{d}{2}$.



Ratkaistaan pohjan lävistäjän pituus.



$$d^2 = 2{,}16^2 + 2{,}16^2$$

$$d^2 = 9{,}3312$$

$$d = \sqrt{9{,}3312} \approx 3{,}05470 \text{ (m)}$$

Siis $\frac{d}{2} = \frac{\sqrt{9{,}3312}}{2} \approx 1{,}52735$ (m).

Korkeus h ratkaistaan Pythagoraan lauseella.

$$h^2 + 1{,}52735^2 = 2{,}72^2$$

$$h^2 = 2{,}72^2 - 1{,}52735^2$$

Välituloksen sijasta lausekkeeseen voidaan näppäillä [Ans] -näppäimellä laskimessa oleva $\frac{d}{2}$:n arvo.

$$h \approx 2{,}2507 \text{ (m)}$$

Teltan tilavuus on

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

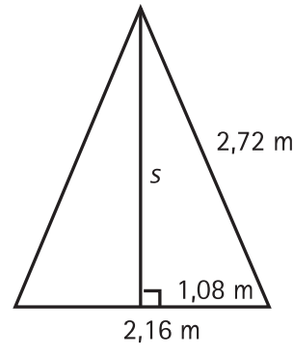
Kolmasosa pohjan pinta-alan ja korkeuden tulosta.

$$= \frac{1}{3} \cdot 2{,}16^2 \cdot 2{,}2507 \approx 3{,}50 \text{ (m}^3\text{)}.$$

b) Teltan katto muodostuu neljästä samanlaisesta tasakylkisestä kolmiosta.

Ratkaistaan vaippakolmion korkeus s.

$$s^2 + 1{,}08^2 = 2{,}72^2$$
$$s^2 = 2{,}72^2 - 1{,}08^2$$
$$s \approx 2{,}4964 \text{ (m)}$$



Katon pinta-ala on

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2{,}16 \cdot 2{,}4964 \approx 10{,}8 \text{ (m}^2\text{)}.$$

VASTAUS a) $3{,}50 \text{ m}^3$ b) $10{,}8 \text{ m}^2$

Harjoituksia

229. 17 m^3 kivimursketta kasaantui murskauskoneen alle kartionmuotoiseksi kasaksi, jonka korkeus oli 2,8 m. Kuinka suuren maa-alan kasa peitti?

230. Suoran ympyräkartion korkeus on 8,3 cm ja pohjaympyrän halkaisija 8,2 cm. Laske kartion tilavuus ja vaipan pinta-ala.

231. Suoran neliöpohjaisen pyramidin vaippa muodostuu tasakylkisistä kolmioista, joiden kannan pituus on 6,0 m ja kannalle piirretty korkeus 5,0 m. Laske pyramidin korkeus ja tilavuus.

232. Talon katto on muodoltaan säännöllinen nelisivuinen pyramidi, jonka pohjasärmien pituus on 9,70 m. Katon lappeiden kaltevuuskulma on 17°. Laske katon pinta-ala.

Pallo

Pallon pinta-ala ja tilavuus

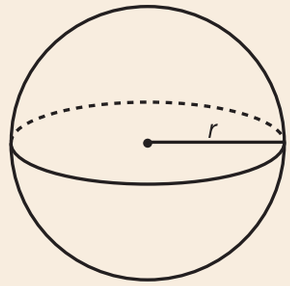
Pallon pinta-ala lasketaan kaavalla

$$A = 4\pi r^2$$

ja tilavuus kaavalla

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

missä r on pallon säde.



ESIMERKKI 1 Puolipallon muotoisen säiliön tilavuuden tulee olla 300 l. Kuinka suuri säiliön läpimitan tulee olla?

RATKAISU Koko pallon tilavuuden $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ tulee olla $600\,\text{l} = 600\,\text{dm}^3$.

Ratkaistaan pallon säde.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 600 \qquad | \cdot 3$$

$$4\pi r^3 = 1800 \qquad | : 4\pi$$

$$r^3 = \frac{1800}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1800}{4\pi}} \approx 5{,}2322\ (\text{dm})$$

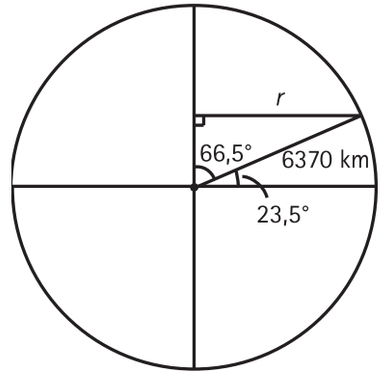
Säiliön läpimitan tulee olla

$$2r = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1800}{4\pi}}\ \text{dm} \approx 10{,}5\ \text{dm} = 105\ \text{cm}.$$

VASTAUS 105 cm

ESIMERKKI 2 Kravun kääntöpiiri on leveyspiiri $23{,}5°$ pohjoista leveyttä. Kuinka pitkä Kravun kääntöpiiri on? Maapallon säde on $6\,370$ km.

RATKAISU Kun maapallo leikataan napojen kautta kulkevalla tasolla, muodostuu viereinen leikkauskuvio. Kuviossa r on Kravun kääntöpiirin säde.



$$\sin 66{,}5° = \frac{r}{6\,370} \qquad \big| \cdot 6\,370$$

$$r = 6\,370 \cdot \sin 66{,}5° \approx 5\,841{,}7 \text{ (km)}$$

Kravun kääntöpiirin pituus on

$$2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 6\,370 \cdot \sin 66{,}5° \approx 36\,700 \text{ (km)}.$$

VASTAUS 36 700 km

Harjoituksia

233. Kuinka monta kilogrammaa normaalipaineista ilmaa mahtuu ilmapalloon, jonka säde on $4{,}53$ m? Ilman tiheys on $1{,}29$ kg/m^3.

234. Pallon muotoisen kaasusäiliön tilavuuden tulee olla $6{,}00$ m^3. Kuinka suuri säiliön läpimitan tulee olla?

235. Suomen pinta-ala on noin $338\,000$ km^2. Mikä olisi pinta-alaltaan Suomen suuruisen pikkuplaneetan ympärysmitta?

236. Pohjoinen napapiiri on leveyspiiri $66{,}6°$ pohjoista leveyttä. Kuinka pitkä pohjoinen napapiiri on? Maapallon säde on $6\,370$ km.

237. Suorakulmaisen särmiön muotoinen hautakivi on 80 cm korkea, 2,10 m pitkä ja 32 cm leveä. Voidaanko kivi nostaa nosturilla, joka pystyy nostamaan enintään kahden tonnin painoisen kuorman? Hautakiven tiheys on $2{,}7 \cdot 10^3$ kg/m^3.
(Ylioppilaskoe, k. 2000)

238. Maapallon väkiluku on 6,3 miljardia, ja maapallon säde on 6 370 km. Mikä on väestön tiheys (henkeä/km^2), jos väestö ajatellaan jaetuksi tasaisesti koko maapallolle? Mikä on väestön tiheys, jos otetaan huomioon vain maapinta-ala? Vesistöjen osuus maapallon pinnasta on 71 %.
(Ylioppilaskoe, s. 2003)

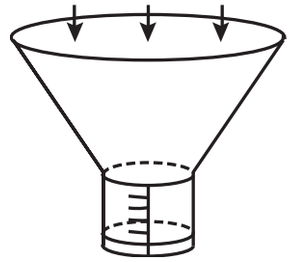
239. Pystyssä olevan suoran ympyrälieriön muotoisen tynnyrin pohjan halkaisija on 0,70 m ja korkeus 1,20 m. Tynnyriin kaadetaan 120 litraa öljyä. Määritä tyhjän tilan korkeus tynnyrissä. (Ylioppilaskoe, s. 2000)

240. Suorakulmaisen särmiön muotoisen veistoksen leveys on 2,00 m, pituus 1,00 m ja korkeus 3,00 m. Veistoksesta tehdään pienoismalli, jonka tilavuus on sadasosa alkuperäisen veistoksen tilavuudesta. Mitkä ovat pienoismallin mitat? (Ylioppilaskoe, s. 1998)

241. Suorakulmion muotoisesta peltilevystä (mitat 40 cm × 30 cm) voidaan valmistaa ympyrälieriön vaippa kahdella tavalla: lieriön korkeus on joko 40 cm tai 30 cm. Kumman lieriön tilavuus on suurempi, ja mikä on tilavuuksien suhde?
(Ylioppilaskoe, s. 1999)

242. Pallon muotoisen teräksisen painesäiliön seinämän paksuus on 7,5 mm. Säiliön vetoisuus on 200 litraa. Kuinka paljon tyhjä säiliö painaa? Teräksen tiheys on 7 800 kg/m^3.

243. Sademittari koostuu leveäsuisesta suppilomaisesta sadeveden keräämiseen tarkoitetusta yläosasta ja ympyrälieriön muotoisesta alaosasta, johon sadevesi kertyy. Lieriöosan pohjaympyrän säde on 2,2 cm ja suppilo-osan yläreunan säde 6,6 cm. Lieriöosan reunassa on asteikko, joka osoittaa sateen määrän millimetreinä. Mikä on asteikon jakoviivojen välinen etäisyys?
(Ylioppilaskoe, s. 2003)



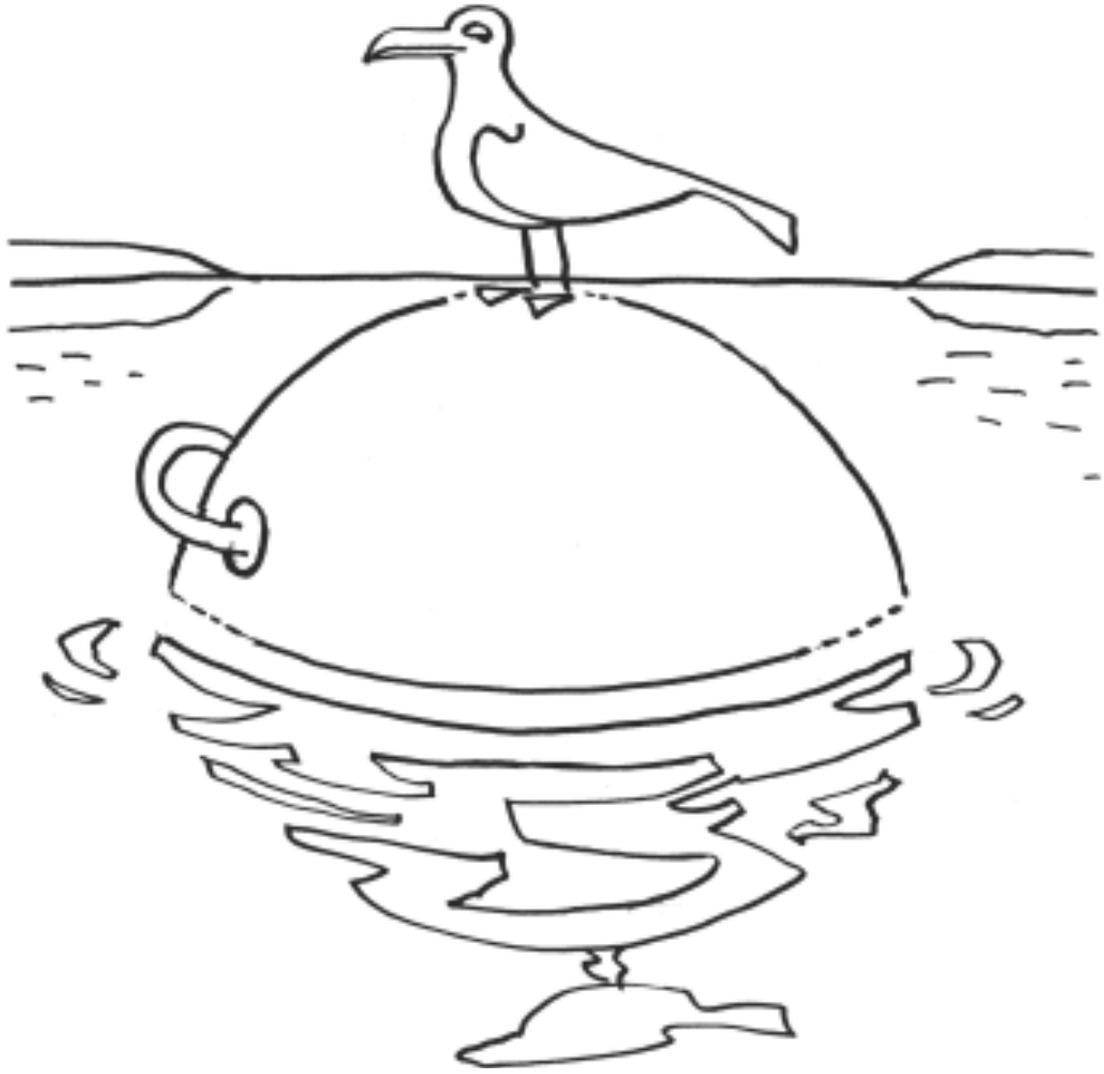
244. Neliöpohjaisen suoran pyramidin korkeus on 21 ja pohjasärmän pituus $20\sqrt{2}$. Laske pyramidin sivusärmän pituus. Kuinka suuren kulman sivusärmä muodostaa pyramidin pohjan kanssa? (Ylioppilaskoe, k. 2003)

245. Suoran neliöpohjaisen pyramidin sivutahkot ovat tasakylkisiä kolmioita, joiden huippukulman suuruus on 52° ja kylkien pituus 7,6 cm. Laske pyramidin tilavuus.

246. Laihia ja Kaavi ovat likimain 63. leveysasteella. Niiden leveyspiiriä pitkin mitattu etäisyys on 330 kilometriä. Kuinka paljon aikaisemmin aurinko nousee Kaavilla kuin Laihialla? Maapallon säde on 6 360 km. (Ylioppilaskoe, k. 1997)

247. Öljysäiliö on vaipallaan vaakasuorassa asennossa makaava suora ympyrälieriö. Säiliön pääty-ympyröiden halkaisija on sisältä mitattuna 1,62 metriä ja säiliön pituus 3,56 metriä. Mittatikusta nähdään, että säiliössä olevan öljykerroksen syvyys on 26 cm. Kuinka monta litraa öljyä säiliössä on?

248. Arkhimedeen lain mukaan vedessä kelluvan kappaleen massa on sama kuin sen syrjäyttämän vesimäärän massa. Pallon muotoinen ontto rautapoiju, joka painaa 47 kg, uppoaa puoleksi veteen. Kuinka paksusta rautalevystä se on valmistettu? Veden tiheys on 1,0 kg/dm^3 ja raudan 7,7 kg/dm^3. (Ylioppilaskoe, k. 2002)



Tehtäväsarjoja

Sarja C

1. Tutki, onko yhtälöillä $\frac{3}{5}x + 2 = 1$ ja $3x^2 - 7x - 20 = 0$ samoja ratkaisuja.
(Ylioppilaskoe, s. 2000)

2. a) Kuinka suuret ovat kolmion kulmat, kun niiden suhde on $5 : 11 : 20$?
b) Kuinka suuret ovat suorakulmaisen kolmion sivut, kun niiden suhde on $3 : 4 : 5$ ja kolmion ala on $13\frac{1}{2}$? (Ylioppilaskoe, k. 2003)

3. Strategiapelissä rakennetaan uudelle planeetalle makean veden säiliötä. Säiliö on ympyräpohjainen lieriö, jonka korkeus on 320 m ja pohjan halkaisija 2 000 m. Säiliöstä haihtuu vettä keskimäärin 100 litraa minuutissa. Kuinka monta planeetan vuotta säiliössä riittäisi vettä, ennen kuin täysi säiliö pelkästään haihtumisen vuoksi olisi tyhjentynyt? Planeetan vuosi on $3 \cdot 10^7$ sekuntia.
(Ylioppilaskoe, k. 2003)

4. Tuoreen koivun painosta 45 % on vettä. Erä koivupilkettä painoi tuoreena 1 300 kg ja kuivattuna 820 kg. Mikä kuivatun pilkkeen vesipitoisuus oli?

5. Katsoja näkee pilvien välisen salaman välähdyksen 25 asteen kulmassa horisontin yläpuolella ja kuulee jyrähdyksen 35 sekunnin kuluttua salamaniskusta. Kuinka korkealla salamanisku tapahtui? Kuinka etäällä katsojasta oli paikka, jonka yläpuolella salama iski? Äänen nopeus on 340 m/s. Maan pinta oletetaan tasoksi. (Ylioppilaskoe, s. 2002)

6. Piensijoittaja osti vuoden alussa erään yhtiön osakkeita. Osake menetti kuitenkin lyhyessä ajassa viidenneksen vuoden alun arvostaan. Tämän jälkeen osakkeen kurssi kääntyi hitaaseen nousuun ja nousi vuoden loppuun mennessä alimmalta tasoltaan 7,0 %. a) Kuinka monta prosenttia osakkeiden arvo oli muuttunut vuoden alusta vuoden loppuun mennessä? b) Mihin hintaan piensijoittaja oli osakkeet ostanut, kun hän myi ne vuoden lopussa ja laski menettäneensä 900 €? c) Kuinka monta prosenttia osakekurssin olisi tullut edelleen nousta, jotta se olisi saavuttanut alkuperäisen tasonsa?
(Ylioppilaskoe, k. 2003)

7. Muodosta geometrisen jonon $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, ... n:n ensimmäisen termin summa. Ratkaise summalauseketta käyttäen, mistä n:n arvosta alkaen summa ylittää miljoonan. (Ylioppilaskoe, s. 2004)

8. Suoran neliöpohjaisen pyramidin muotoisen teltan tukikehikko muodostuu neljästä teltan huipussa yhteenliitetystä 2,72 metrin pituisesta kepistä. Teltan korkeus on 1,98 metriä. Laske teltan pohjapinta-ala ja tilavuus.

9. Auton jäähdytin, jonka tilavuus on 10 litraa, vuotaa litran vuorokaudessa. Jäähdytintä ei ole ehditty korjata, vaan siihen on lisätty joka aamu litra vettä. Maanantaiaamuna jäähdytin oli täynnä liuosta, jonka pakkasnestepitoisuus oli 40 tilavuusprosenttia. Viikon päästä maanantaiaamuna jäähdyttimeen lisättiin jälleen vettä, ennen kuin auto viimein vietiin korjaamoon. Mikä oli tuolloin jäähdyttimen pakkasnestepitoisuus? Mikä olisi pakkasnestepitoisuus ollut, jos auto olisi viety korjaamoon viikon sijasta neljän viikon kuluttua? (Ylioppilaskoe, s. 2002)

10. Rahastosäästäjä ostaa osakerahaston osuuksia tai niiden osia 100 eurolla joka kuukausi. Ensimmäisellä ostokerralla yhden rahasto-osuuden arvo on 20 €. Oletetaan, että kurssi laskee tästä 2 eurolla joka kuukausi, kunnes saavuttaa pohjalukeman 8 €. Tämän jälkeen kurssi alkaa toipua ja nousee 2 eurolla joka kuukausi, kunnes se on saavuttanut lähtöarvonsa 20 €, jolloin säästäjä tekee viimeisen ostonsa. Selvitä säästäjän osakesalkun arvo periodin lopussa. Kuinka monta prosenttia suurempi tämä on, kuin jos hän olisi sijoittanut periodin alussa yhdellä kertaa koko sijoittamansa summan? Sijoittamisesta koituvia kuluja (ja mahdollisia osinkoja) ei oteta huomioon. (Ylioppilaskoe, s. 2003)

Sarja D

1. a) Ratkaise yhtälö
$(x + 1)(3x - 1) = x + 1$.

b) Miten luku a on valittava, jotta yhtälön $ax^2 + \frac{1}{3}x - 4 = 0$ toisena juurena olisi luku -6?

2. Maantiekartassa on joitakin teiden risteyksiä merkitty ympyrällä, jonka halkaisija on 1,8 mm. Mitä risteysalueen halkaisijaa tämä vastaa todellisuudessa, kun kartan mittakaava on 1 : 200 000? Jos risteysalueen halkaisija todellisuudessa on 25 m, niin kuinka suuri sen tulisi kyseisellä kartalla olla? (Ylioppilaskoe, k. 2001)

3. Taunon kuukausipalkasta käteen jäävä osa 1 958 euroa on 176 euroa suurempi kuin tasan kaksi vuotta sitten. Samana aikana kuluttajahintaindeksin pisteluku on noussut 104,7:sta 116,9:ään. Kuinka monta prosenttia Taunon reaaliset nettoansiot ovat nousseet tai laskeneet?

4. Henkilö ostaa 10 000 eurolla itse metsään merkitsemänsä tontin, jota hän luulee neliönmuotoiseksi ja yhden hehtaarin suuruiseksi. Kaupanteon jälkeen selviää, että tontti on neljäkäs, jonka sivun pituus on 98,5 m ja yksi kulma 81°. Määritä tontin pinta-ala hehtaareina sekä tontin neliömetrihinta euroina. (Ylioppilaskoe, k. 2005)

5. Litran pulloon kaadetaan 0,930 litraa vettä ja pullo pannaan pakastimeen. Veden jäätyessä sen tilavuus kasvaa 8,0 %. Kuinka korkealle tällöin työntyy lieriömäinen jäätulppa 5,00 cm^2:n kokoisesta pullon suusta? (Ylioppilaskoe, k. 1988)

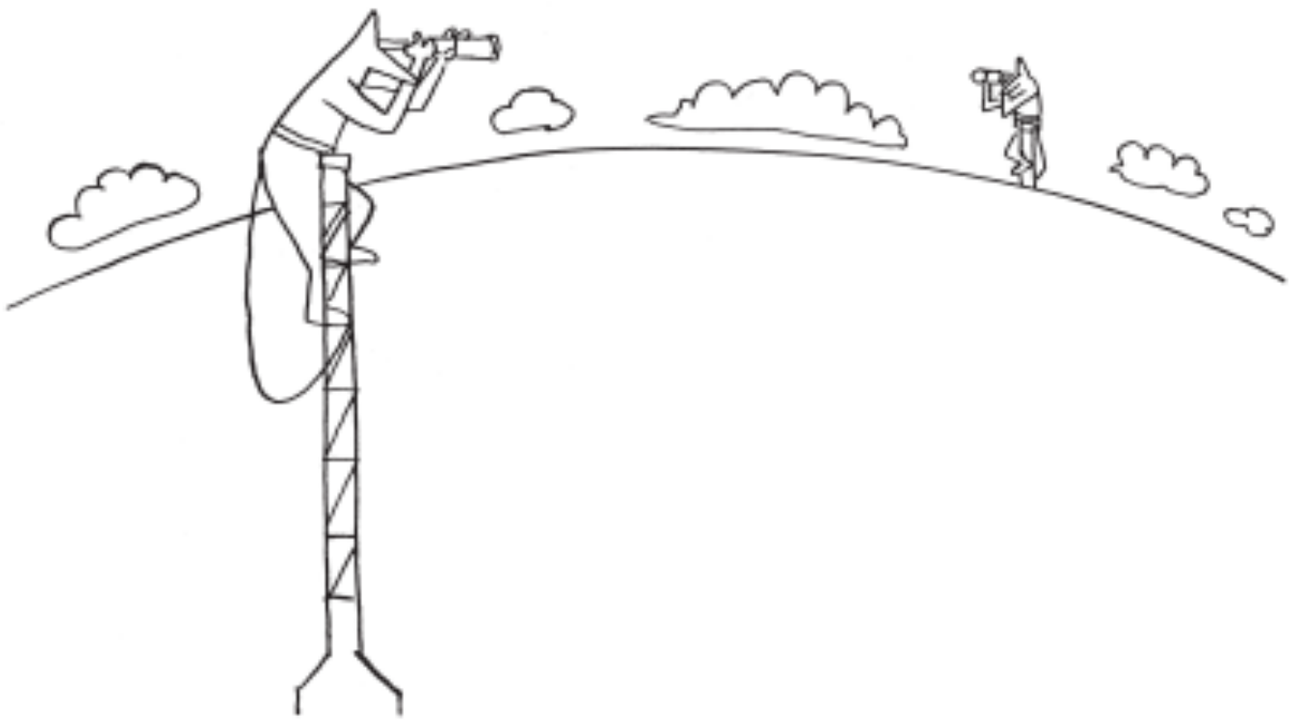
6. Veneen pohjassa olevasta reiästä tulee aikayksikössä sisään vesimäärä, joka on suoraan verrannollinen reiän halkaisijan neljänteen potenssiin. Yhdellä pumpulla pystytään pitämään tyhjänä vene, jonka pohjassa on 1,2 cm:n läpimittainen reikä. Kuinka monta samanlaista pumppua tarvitaan pitämään tyhjänä vene, jonka pohjassa on 1,9 cm:n läpimittainen reikä? (Ylioppilaskoe, k. 1998)

7. Cesiumin isotoopin 137 puoliintumisaika on 29 vuotta. Tshernobylin ydinvoimalassa 26.4.1986 tapahtuneessa onnettomuudessa kyseistä isotooppia karkasi ilmaan ja kulkeutui ilmavirtausten mukana Suomeen. Kuinka monta prosenttia isotoopista oli vielä jäljellä, kun onnettomuudesta 26.4.2006 oli kulunut 20 vuotta?

8. Kahden kaupungin välinen etäisyys on 100 km. Kaupunkeihin rakennetaan yhtä korkeat antennitornit. Kuinka korkeita tornien tulisi olla, jotta niiden välillä olisi suora näköyhteys? Maapallon säde on 6 370 km. Anna vastaus metrin tarkkuudella.

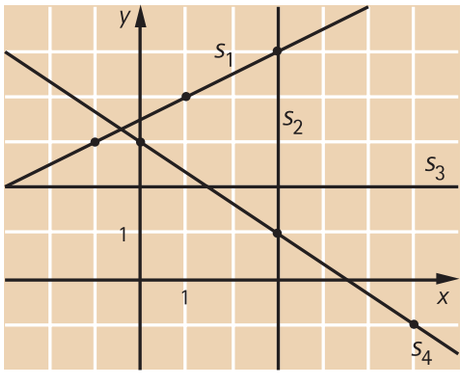
9. Aloitetaan jono luvulla 7, muodostetaan toinen jäsen lisäämällä ensimmäiseen luku 5, kolmas jäsen lisäämällä toiseen luku 10, neljäs jäsen lisäämällä kolmanteen luku 15, ja jatketaan näin lisäämällä aina luku, joka on viitosen verran edellistä lisättyä lukua suurempi. Mikä jonon 123. jäsen on?

10. Kuinka paljon lukion stipendirahastoon on lahjoitettava rahaa euroina (€), kun tarkoituksena on jakaa lahjoitus korkoineen stipendeinä seuraavasti: tasan vuoden kuluttua lahjoituksesta 200 €, kahden vuoden kuluttua 300 €, kolmen vuoden 400 €, neljän 500 € ja viiden vuoden kuluttua 600 €? Pääomaan lisätään vuosittain 4,5 prosentin korko, ensimmäisen kerran vuoden kuluttua lahjoituksesta. (Ylioppilaskoe, s. 2001)



Suora

1. a) Mitkä kuvion suorien s_1, s_2, s_3 ja s_4 kulmakertoimet ovat?



b) Tunnista seuraavien yhtälöiden joukosta suorien s_1, s_2, s_3 ja s_4 yhtälöt.

$y = -\frac{2}{3}x + 4$ $\quad$ $y = 2x + \frac{7}{2}$ $\quad$ $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ $\quad$ $y = -\frac{2}{3}x + 3$

$x = 0$ $\quad$ $y = 2$ $\quad$ $y = 0$ $\quad$ $x = 3$

2. Suora kulkee pisteen $(2, 1)$ kautta, ja suoran kulmakerroin on -3. Muodosta suoran yhtälö käyttäen kaavaa $y - y_1 = k(x - x_1)$.

3. Määritä suoralta $3x + y - 7 = 0$ piste, jonka
a) x-koordinaatti on 0 b) y-koordinaatti on 0.

4. Tutki, toteuttavatko luvut
a) $x = 3$ ja $y = -2$ b) $x = 1{,}5$ ja $y = -1$

yhtälöparin $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x + 3y = 0. \end{cases}$

Tehtävien vastaukset ovat seuraavalla sivulla.

Lineaarinen muutos ja kulmakerroin

Lineaarinen riippuvuus

Suureen y riippuvuus suureesta x on *lineaarinen* eli *suoraviivainen*, jos riippuvuutta kuvaa suora.

Jos riippuvuus on lineaarinen, niin suureen x kasvaessa yhdellä yksiköllä suureen y muutos on aina yhtä suuri.

ESIMERKKI 1

Keskimääräinen vuorokauden keskilämpötila Helsingissä on toukokuun 1. päivänä 6,5 °C ja toukokuun 31. päivänä 12,8 °C. Tällä välillä lämpötila nousee likimain suoraviivaisesti. Mikä vuorokauden keskilämpötila on toukokuun 13. päivänä? Tiedot perustuvat havaintoihin vuosilta 1971–2000.

RATKAISU

Koska lämpötila muuttuu suoraviivaisesti, se nousee joka vuorokausi yhtä paljon. Lämpötilan muutos 30 vuorokaudessa on
$12{,}8\ °\text{C} - 6{,}5\ °\text{C} = 6{,}3\ °\text{C}$, joten muutos yhdessä vuorokaudessa on
$\frac{6{,}3}{30}\ °\text{C} = 0{,}21\ °\text{C}$. Keskilämpötila toukokuun 13. päivänä on
$6{,}5\ °\text{C} + 12 \cdot 0{,}21\ °\text{C} \approx 9{,}0\ °\text{C}$.

VASTAUS

9,0 °C

TAIDANKO? VASTAUKSET

1. a) $s_1: \frac{1}{2}$, $s_2:$ ei kulmakerrointa, $s_3: 0$, $s_4: -\frac{2}{3}$

b) $s_1: y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$, $s_2: x = 3$, $s_3: y = 2$, $s_4: y = -\frac{2}{3}x + 3$

2. $y = -3x + 7$ **3.** a) (0, 7) b) $(\frac{7}{3}, 0)$ **4.** a) Toteuttavat. b) Eivät toteuta.

Suoran kulmakerroin

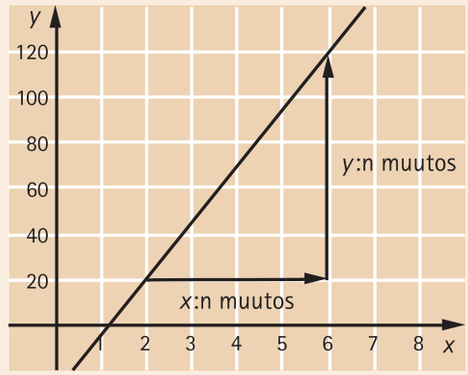
Kun siirrytään suoran pisteestä toiseen pisteeseen, suhde

$$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$$

pysyy aina samana. Suhde on suoran *kulmakerroin*. Kulmakerroin ilmaisee, kuinka suuri pisteen y-koordinaatin muutos on silloin, kun x-koordinaatti kasvaa yhdellä.

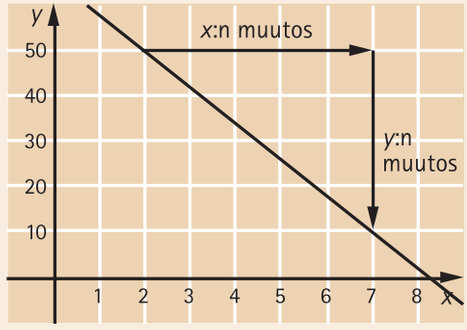
Viereisen suoran kulmakerroin on $\frac{100}{4} = 25$.

Kun x kasvaa yhdellä, niin y kasvaa 25 yksikköä.



Viereisen suoran kulmakerroin on $\frac{-40}{5} = -8$.

Kun x kasvaa yhdellä, niin y pienenee 8 yksikköä.



Kulmakertoimen merkki

- Nousevan suoran kulmakerroin on positiivinen.
- Laskevan suoran kulmakerroin on negatiivinen.
- x-akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on 0.
- y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa.

Kulmakertoimen laskukaava

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) y-koordinaattien erotuksen suhde x-koordinaattien erotukseen.

Suorien yhdensuuntaisuusehto

Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niillä on sama kulmakerroin.

ESIMERKKI 2 Suora kulkee pisteiden $(-18, 23)$ ja $(13, 19)$ kautta. Määritä suoran kulmakerroin.

RATKAISU

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{19 - 23}{13 - (-18)}$$

Pisteiden $(-18, 23)$ ja $(13, 19)$ y-koordinaattien erotuksen suhde x-koordinaattien erotukseen.

$$= \frac{-4}{31} = -\frac{4}{31}$$

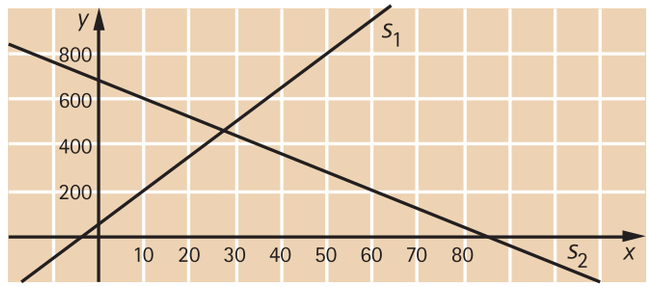
VASTAUS $-\frac{4}{31}$

Harjoituksia

249. Aurinko nousi Jyväskylässä 2.4. kello 6.36 (kesäaikaa) ja nousee viikkoa myöhemmin kello 6.13. Mihin aikaan aurinko nousee Jyväskylässä 14.4., kun lyhyellä aikavälillä auringon nousuaika on päivämäärän lineaarinen funktio? (Ylioppilaskoe, k. 1993)

250. Lämpötila 1,73 kilometrin korkeudessa oli -12 °C ja 2,57 kilometrin korkeudessa -17 °C. Lämpötilan riippuvuus korkeudesta on lineaarinen. Mikä lämpötila on huipulla 3,90 kilometrin korkeudessa?

251. Päättele kuviosta suorien s_1 ja s_2 kulmakertoimet.



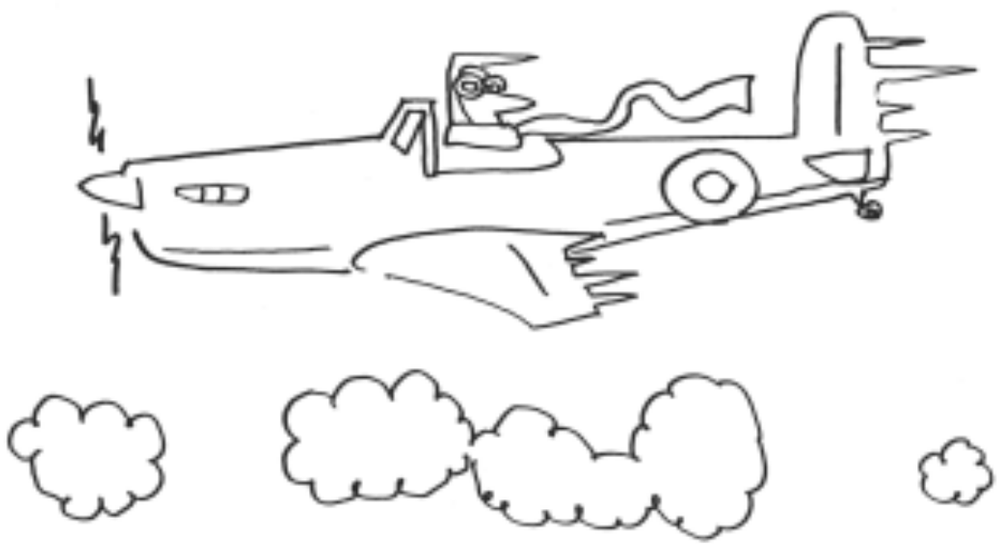
252. Suora kulkee pisteiden

a) $(-1, 1)$ ja $(5, 1)$ b) $(-5, 0)$ ja $(3, -2)$

c) $(-12, -1)$ ja $(-3, 2)$ d) $(-3, 0)$ ja $(-3, 5)$

kautta. Laske kulmakerroin ja ilmoita, onko suora nouseva, laskeva vai jommankumman koordinaattiakselin suuntainen.

253. Leikkaako pisteiden $(10, -19)$ ja $(21, 58)$ kautta kulkeva suora suoran, joka kulkee pisteiden $(10, 21)$ ja $(16, 63)$ kautta?



Suoran yhtälö

Suoran yhtälön muodostaminen

Jos suora kulkee pisteen (x_1, y_1) kautta ja suoran kulmakerroin on k, suoran yhtälö muodostetaan kaavalla

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Suoran yhtälön ratkaistu muoto

Suoran yhtälö saatetaan tavallisesti niin sanottuun *ratkaistuun muotoon*

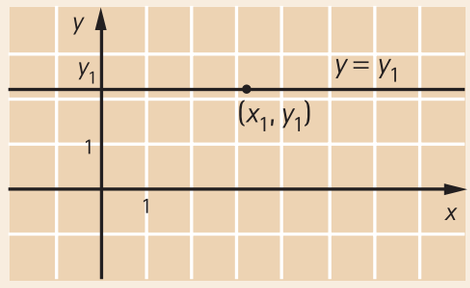
$$y = kx + b.$$

Yhtälössä
- kerroin k on suoran kulmakerroin
- vakiotermi b ilmaisee suoran ja y-akselin leikkauspisteen: suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, b)$.

Koordinaattiakselien suuntaiset suorat

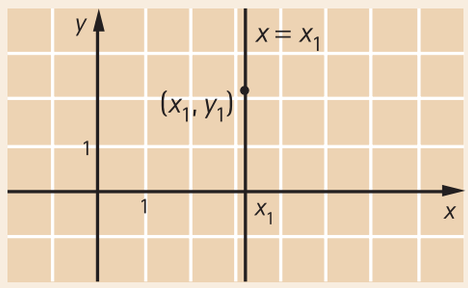
x-akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on 0.
Pisteen (x_1, y_1) kautta kulkevan x-akselin suuntaisen suoran yhtälö on

$y = y_1$.



y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa.
Pisteen (x_1, y_1) kautta kulkevan y-akselin suuntaisen suoran yhtälö on

$x = x_1$.



ESIMERKKI 1 Suora kulkee pisteiden $(7, -2)$ ja $(3, 1)$ kautta. Muodosta suoran yhtälö.

RATKAISU Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-2)}{3 - 7}$$

Pisteiden $(7, -2)$ ja $(3, 1)$ y-koordinaattien erotuksen suhde x-koordinaattien erotukseen.

$$= \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Sijoitetaan kulmakerroin $k = -\frac{3}{4}$ ja pisteen $(3, 1)$ koordinaatit $x_1 = 3,\ y_1 = 1$.*

$$y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

Ratkaistaan y.

$$y - 1 = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + 1$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$$

VASTAUS $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$

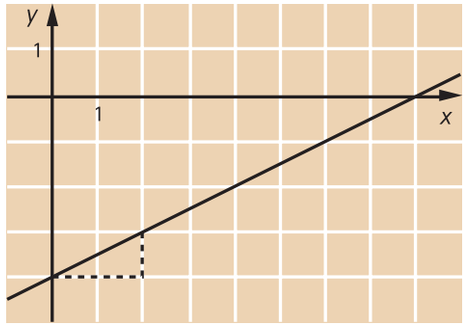
* Voidaan myös sijoittaa pisteen $(7, -2)$ koordinaatit $x_1 = 7,\ y_1 = -2$.

ESIMERKKI 2 Piirrä suora. a) $y = \frac{1}{2}x - 4$ b) $y = 2$ c) $x = -3$

RATKAISU

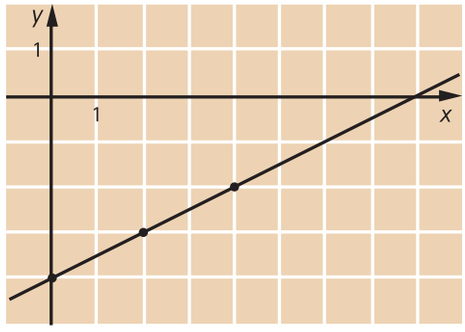
a) *Tapa 1.* Suoran kulmakerroin on $\frac{1}{2}$, ja suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -4)$. Suora voidaan piirtää käyttämällä apukolmiota, jossa

$$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}} = \frac{1}{2}.$$

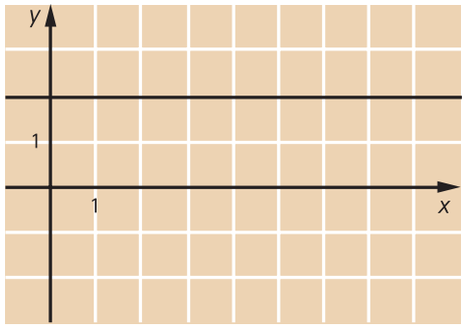


Tapa 2. Määritetään kolme suoran pistettä.

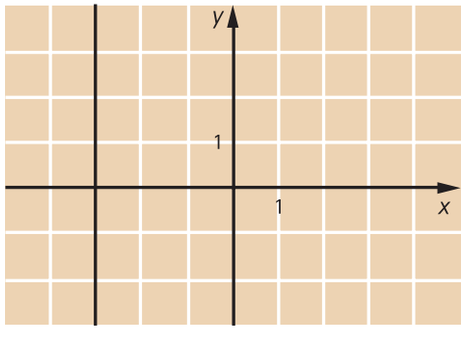
x	$y = \frac{1}{2}x - 4$
0	−4
2	−3
4	−2



b) Suora $y = 2$ on x-akselin suuntainen. Suora muodostuu niistä koordinaatiston pisteistä, joiden y-koordinaatti on 2.

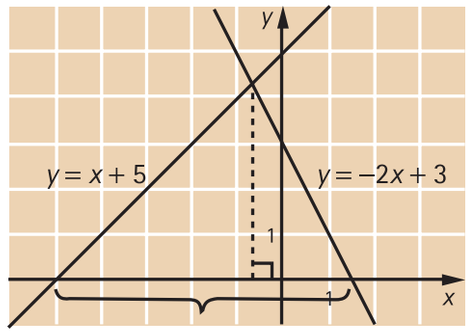


c) Suora $x = -3$ on y-akselin suuntainen. Suora muodostuu niistä koordinaatiston pisteistä, joiden x-koordinaatti on -3.



ESIMERKKI 3 Suorat $y = x + 5$ ja $y = -2x + 3$ rajaavat yhdessä x-akselin kanssa kolmion. Laske kolmion pinta-ala.

RATKAISU Kolmion kannaksi valitaan jana, jonka suorat erottavat x-akselista. Tällöin kolmion korkeus on suorien leikkauspisteen y-koordinaatti.



Ratkaistaan, missä pisteissä suorat leikkaavat x-akselin.

$y = x + 5$: Sijoitetaan $y = 0$.

$x + 5 = 0$

$x = -5$

Leikkauspiste on $(-5, 0)$.

$y = -2x + 3$: Sijoitetaan $y = 0$.

$-2x + 3 = 0$

$-2x = -3 \quad | : (-2)$

$x = \frac{3}{2}$

Leikkauspiste on $(\frac{3}{2}, 0)$.

Kannan pituus on $5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$.

Ratkaistaan suorien leikkauspisteen x-koordinaatti.

$x + 5 = -2x + 3$ Ratkaistaan, millä x:n arvolla lausekkeiden $x + 5$ ja $-2x + 3$ arvot ovat yhtä suuret.

$3x = -2 \quad | : 3$

$x = -\frac{2}{3}$

Lasketaan leikkauspisteen y-koordinaatti.

$y = x + 5$ Yksinkertaisempaan yhtälöön $y = x + 5$ sijoitetaan $x = -\frac{2}{3}$.

$= -\frac{2}{3} + 5 = -\frac{2}{3} + \frac{15}{3} = \frac{13}{3}$

Kolmion pinta-ala on puolet kannan ja korkeuden tulosta:

$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{3} = \frac{169}{12} = 14\frac{1}{12}$.

VASTAUS $14\frac{1}{12}$

Harjoituksia

254. Muodosta yhtälö suoralle, jonka kulmakerroin on $-\frac{1}{3}$ ja joka kulkee a) pisteen $(6, -4)$ b) origon kautta.

255. Suora kulkee pisteiden $(5, -4)$ ja $(-1, 14)$ kautta. Muodosta suoran yhtälö. Missä pisteissä suora leikkaa koordinaattiakselit?

256. Piirrä suorat $y = 3x - 2$, $y = -\frac{2}{3}x + 2$, $x = 1$ ja $y = -2$.

257. Kun auton nopeusmittarin mukaan ajettiin nopeudella 60 km/h, tienvarren mittalaite näytti todelliseksi nopeudeksi 55 km/h. Kun ajettiin nopeudella 85 km/h, todellinen nopeus oli 88 km/h. Oletetaan, että auton mittarinäytön ja todellisen nopeuden välinen riippuvuus on lineaarinen. Muodosta lauseke, jolla voidaan laskea todellinen nopeus y, kun tunnetaan mittarin näyttämä nopeus x. Mikä todellinen nopeus on, kun mittari näyttää 120 km/h?

Kahden muuttujan yhtälö ja epäyhtälö

Kahden muuttujan yhtälö $Ax + By + C = 0$

Kahden muuttujan yhtälö $Ax + By + C = 0$, jossa ainakin toinen kertoimista A ja B on eri suuri kuin nolla, esittää suoraa.

Suoran kulku saadaan selville saattamalla yhtälö ratkaistuun muotoon.

Jos yhtälöstä puuttuu y, suora on y-akselin suuntainen.

ESIMERKKI 1 Muodosta yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen $(-2, -5)$ kautta ja joka on yhdensuuntainen suoran $4x - 6y - 7 = 0$ kanssa.

RATKAISU Suorien kulmakertoimien tulee olla yhtä suuret.

Saatetaan yhtälö $4x - 6y - 7 = 0$ ratkaistuun muotoon.

$$4x - 6y - 7 = 0$$

$$-6y = -4x + 7 \qquad \big| : (-6) \qquad \text{Jaetaan termeittäin.}$$

$$y = \frac{4}{6}x - \frac{7}{6}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{6}$$

Suoran $4x - 6y - 7 = 0$ kulmakerroin on $\frac{2}{3}$.

Kysytyn suoran yhtälö on

$y - y_1 = k(x - x_1)$ Sijoitetaan kulmakerroin $k = \frac{2}{3}$ ja pisteen $(-2, -5)$ koordinaatit $x_1 = -2,\ y_1 = -5$.

$$y - (-5) = \frac{2}{3}(x - (-2))$$

$$y + 5 = \frac{2}{3}(x + 2)$$

$$y + 5 = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} - \frac{15}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{3}.$$

VASTAUS $y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$

Kahden muuttujan epäyhtälö

Kahden muuttujan epäyhtälöiden $ax + by + c > 0$ ja $ax + by + c < 0$ ratkaisujoukot selvitetään kuvion avulla.

Piirretään suora $ax + by + c = 0$. Suoran toisella puolella olevien pisteiden koordinaatit toteuttavat epäyhtälön $ax + by + c > 0$ ja toisella puolella olevat pisteet epäyhtälön $ax + by + c < 0$. Puoli, jossa ratkaistavana oleva epäyhtälö toteutuu, löydetään laskemalla lausekkeen $ax + by + c$ arvo suoran ulkopuolella olevassa pisteessä.

ESIMERKKI 2

Ratkaise graafisesti

a) epäyhtälö $2x - y \geqslant 3$

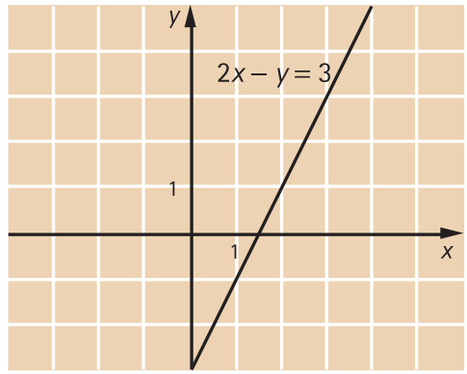
b) epäyhtälö $2x + 3y \leqslant 15$

c) epäyhtälöpari $2x - y \geqslant 3$ ja $2x + 3y \leqslant 15$.

RATKAISU

a) Piirretään suora $2x - y = 3$. Piirtämistä varten yhtälö saatetaan ratkaistuun muotoon.

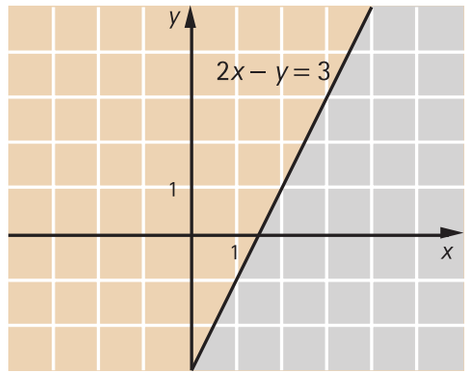
$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ -y &= -2x + 3 \qquad \big| \cdot (-1) \\ y &= 2x - 3 \end{aligned}$$



Origo eli piste $(0, 0)$ on suoran yläpuolella. Sijoitetaan koordinaatit lausekkeeseen $2x - y$.

$$2 \cdot 0 - 0 = 0 < 3$$

Origon koordinaatit eivät toteuta epäyhtälöä $2x - y \geqslant 3$. Epäyhtälö toteutuu suoralla $2x - y = 3$ ja sen alapuolella.

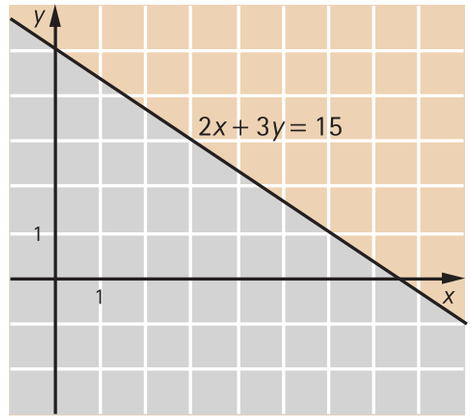


b) Piirretään suora $2x + 3y = 15$.

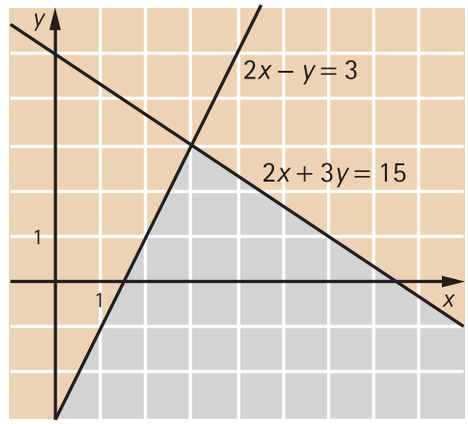
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 15 \\ 3y &= -2x + 15 \qquad \big| : 3 \\ y &= -\frac{2}{3}x + 5 \end{aligned}$$

Epäyhtälö $2x + 3y \leqslant 15$ toteutuu suoralla $2x + 3y = 15$ ja sen alapuolella, sillä origon koordinaatit toteuttavat epäyhtälön:

$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \leqslant 15.$



c) Pisteet, jotka toteuttavat epäyhtälöparin $2x - y \geqslant 3$ ja $2x + 3y \leqslant 15$, ovat molempien suorien $2x - y = 3$ ja $2x + 3y = 15$ alapuolella tai ratkaisualuetta rajoittavilla puolisuorilla.



Harjoituksia

258. Saata suoran yhtälö ratkaistuun muotoon. Mikä suoran kulmakerroin on? a) $4x + 2y + 3 = 0$ b) $4x - 12y = 3$

259. Muodosta yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta ja joka on yhdensuuntainen suoran $8x - 6y + 11 = 0$ kanssa.

260. Missä pisteissä suora $3x + 4y - 36 = 0$ leikkaa koordinaattiakselit? Määritä suoran ja koordinaattiakselien rajaaman kolmion pinta-ala.

261. Ratkaise graafisesti
a) epäyhtälö $2x - y \geqslant 0$
b) epäyhtälöpari $2x - y \geqslant 0$ ja $x + y \geqslant 3$
c) epäyhtälöryhmä

$2x - y \geqslant 0$
$x + y \geqslant 3$
$x \leqslant 3$
$y \geqslant 1.$

Yhtälöpari

Yhtälöparin ratkaiseminen yhteenlaskumenetelmällä

Yhtälöpari voidaan ratkaista *yhteenlaskumenetelmällä*. Yhtälöt kerrotaan sopivilla luvuilla niin, että toisen tuntemattoman kertoimiksi tulevat vastaluvut. Kun saadut yhtälöt lasketaan yhteen, saadaan yhden muuttujan yhtälö, joka ratkaistaan.

Toisen muuttujan arvo ratkaistaan niin, että saatu ratkaisu sijoitetaan jompaankumpaan yhtälöparin yhtälöön. Toisen muuttujan arvo voidaan ratkaista myös toistamalla yhteenlaskumenettely.

ESIMERKKI 1 Mitkä ovat ne luvut x ja y, jotka toteuttavat molemmat yhtälöt $3x + 4y = -2$ ja $5x + 3y = 1$?

RATKAISU Muodostetaan yhtälöistä yhtälöpari.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= -2 \quad | \cdot (-3) \\ 5x + 3y &= 1 \quad | \cdot 4 \end{aligned}$$

Kun yhtälöt kerrotaan merkityillä luvuilla, y:n kertoimiksi saadaan vastaluvut.

$$\begin{aligned} -9x - 12y &= 6 \\ 20x + 12y &= 4 \\ \hline 11x \qquad &= 10 \quad | : 11 \end{aligned}$$

Yhtälöt lasketaan yhteen.

Ratkaistaan x.

$$x = \frac{10}{11}$$

Ratkaistaan y:n arvo toistamalla yhteenlaskumenettely.*

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= -2 \quad | \cdot 5 \\ 5x + 3y &= 1 \quad | \cdot (-3) \end{aligned}$$

Kun yhtälöt kerrotaan merkityillä luvuilla, x:n kertoimiksi saadaan vastaluvut.

$$\begin{aligned} 15x + 20y &= -10 \\ -15x - 9y &= -3 \\ \hline 11y &= -13 \quad | : 11 \\ y &= -\frac{13}{11} \end{aligned}$$

VASTAUS $x = \frac{10}{11}$, $y = -\frac{13}{11}$

ESIMERKKI 2 Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{aligned} y &= 2x - 4 \\ 3x + 2y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

RATKAISU Voitaisiin siirtää ensimmäisen yhtälön termit vasemmalle puolelle, järjestää saamanmuotoiset termit allekkain ja ratkaista yhtälöpari yhteenlaskumenetelmällä. Voidaan käyttää myös *sijoitusmenetelmää*. Ensimmäisessä yhtälössä on y ilmaistu x:n lausekkeena: $y = 2x - 4$. Sijoitetaan lauseke $2x - 4$ y:n paikalle jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 2 &= 0 && \text{Sijoitetaan } y = 2x - 4. \\ 3x + 2(2x - 4) - 2 &= 0 \\ 3x + 4x - 8 - 2 &= 0 \\ 7x - 10 &= 0 \\ 7x &= 10 && | : 7 \\ x &= \frac{10}{7} \end{aligned}$$

---

* Toinen tapa ratkaista y on sijoittaa $x = \frac{10}{11}$ jompaankumpaan yhtälöparin yhtälöön.

Sijoitetaan x:n arvo $\frac{10}{7}$ ensimmäiseen yhtälöön:

$$y = 2 \cdot \frac{10}{7} - 4 = \frac{20}{7} - \frac{28}{7} = -\frac{8}{7}.$$

VASTAUS $x = \frac{10}{7}$, $y = -\frac{8}{7}$

Harjoituksia

262. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x - 3y &= -1. \end{aligned}$$

263. Määritä suorien $x - 3y + 3 = 0$ ja $3x - 10y + 1 = 0$ leikkauspiste. (Ylioppilaskoe, s. 1989)

264. Määritä suorien $y = -2x + 3$ ja $x - 3y - 1 = 0$ leikkauspiste.

265. Yritys haluaa tuoda markkinoille uuden kahvilaadun, jonka kilohinta on 8,00 euroa. Kahvi tehdään sekoittamalla kahta eri kahvilaatua, joista halvemman kilohinta on 6,50 euroa ja kalliimman 9,00 euroa. Kuinka paljon kumpaakin laatua sekoitetaan yhteen kilogrammaan uutta kahvilaatua?

266. Oppilaskunnan myyjäisiin oli leivottu 400 karjalanpiirakkaa, jotka pakattiin neljän ja kymmenen piirakan pusseihin. Neljän piirakan pussien myyntihinta oli 2 euroa ja kymmenen piirakan pussien 4 euroa. Kaikki piirakat myytiin, ja näin saatiin rahaa 174 euroa. Mikä neljän ja kymmenen piirakan pussien lukumäärä oli?

Lineaarinen optimointi

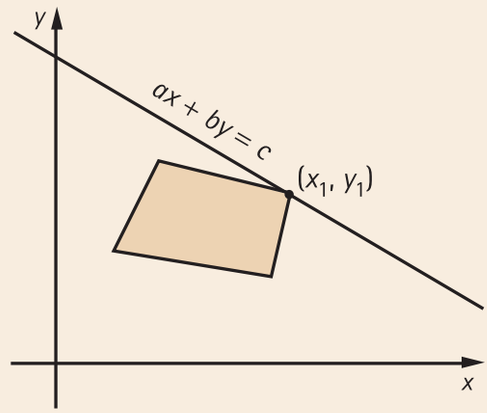
Oletetaan, että a ja b ovat positiivisia lukuja eli $a > 0$ ja $b > 0$.

Muotoa $ax + by$ olevan lausekkeen suurimman tai pienimmän arvon määrittämistä tasoalueessa kutsutaan *lineaariseksi optimoinniksi*.

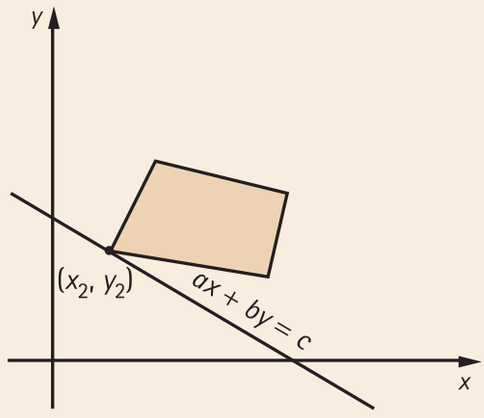
Suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen perustuu seuraavaan havaintoon:

Muotoa $ax + by = c$ olevat suorat, joissa on samat positiiviset kertoimet a ja b, ovat keskenään yhdensuuntaisia. Mitä suurempi vakiotermi c on, sitä ylempänä koordinaatistossa suora kulkee.

Lausekkeen $ax + by$ suurin arvo tasoalueessa löydetään niin, että määritetään alueen piste (x_1, y_1), jonka kautta kulkee ylin muotoa $ax + by = c$ oleva suora. Lausekkeen $ax + by$ suurin arvo alueessa on tällöin $ax_1 + by_1$.

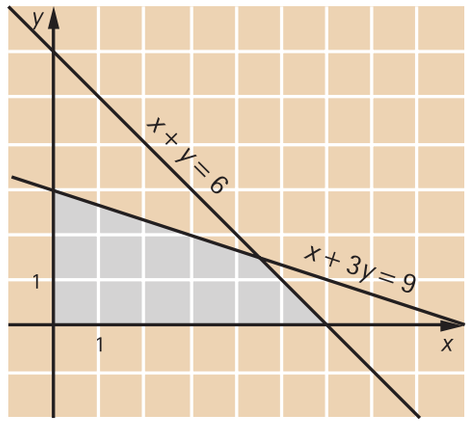


Lausekkeen $ax + by$ pienin arvo tasoalueessa löydetään niin, että määritetään alueen piste (x_2, y_2), jonka kautta kulkee alin muotoa $ax + by = c$ oleva suora. Lausekkeen $ax + by$ pienin arvo alueessa on tällöin $ax_2 + by_2$.



ESIMERKKI 1

Mikä on suurin arvo, jonka lauseke a) $x + 2y$ b) $3x + y$ saa kuvion monikulmion pisteissä?



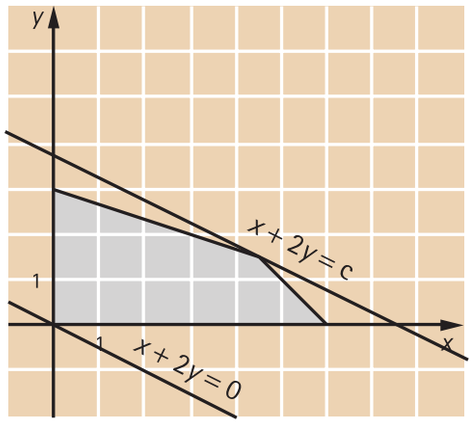
RATKAISU

a) Ratkaistaan muotoa $x + 2y = c$ olevien suorien kulmakerroin. Koska kaikki tätä muotoa olevat suorat ovat keskenään yhdensuuntaiset, voidaan olettaa, että $c = 0$.

$$x + 2y = 0$$
$$2y = -x \qquad | : 2$$
$$y = -\frac{1}{2}x$$

Muotoa $x + 2y = c$ olevien suorien kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$.

Kuvion mukaan ylin alueeseen koskettava suora, jonka kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$, kulkee suorien $x + y = 6$ ja $x + 3y = 9$ leikkauspisteen kautta.



Havainto voidaan varmistaa vertaamalla kulmakertoimia.

Suorien $x + 2y = c$ kulmakerroin on reunasuorien kulmakertoimien välissä, eli $-1 < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$, joten suorien $x + 2y = c$ jyrkkyys on reunasuorien jyrkkyyksien välissä.

Ratkaistaan leikkauspisteen koordinaatit.

$$\begin{aligned} x + \ \ y &= 6 \qquad \big| \cdot (-1) \\ x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x - \ \ y &= -6 \\ x + 3y &= 9 \\ \hline 2y &= 3 \qquad \big| : 2 \\ y &= \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$x + 1\frac{1}{2} = 6$ Yhtälöön $x + y = 6$ sijoitetaan $y = 1\frac{1}{2}$.

$$x = 4\frac{1}{2}$$

Suorien leikkauspisteen koordinaatit ovat $x = 4\frac{1}{2}$ ja $y = 1\frac{1}{2}$.

Lausekkeen $x + 2y$ suurin arvo alueessa on

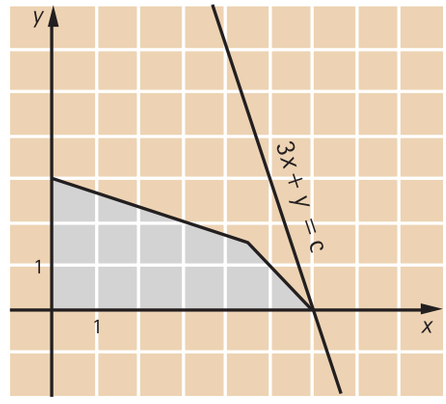
$4\frac{1}{2} + 2 \cdot 1\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$. Lausekkeeseen $x + 2y$ sijoitetaan leikkauspisteen koordinaatit.

b) Ratkaistaan muotoa $3x + y = c$ olevien suorien kulmakerroin.

$$3x + y = c$$

$$y = -3x + c$$

Muotoa $3x + y = c$ olevien suorien kulmakerroin on -3.



Kuvion mukaan ylin alueeseen koskettava suora, jonka kulmakerroin on -3, kulkee pisteen $(6, 0)$ kautta.

Lausekkeen $3x + y$ suurin arvo alueessa on

$3 \cdot 6 + 0 = 18$. Lausekkeeseen $3x + y$ sijoitetaan pisteen $(6, 0)$ koordinaatit.

VASTAUS a) $7\frac{1}{2}$ b) 18

ESIMERKKI 2

Korusepällä on jäljellä 200 grammaa kultaa ja 600 grammaa hopeaa. Hän aikoo käyttää jalometallit suunnittelemiensa kaulakorujen ja rannerenkaiden valmistamiseen. Yhteen kaulakoruun tarvitaan 10 grammaa kultaa ja 20 grammaa hopeaa ja yhteen rannerenkaaseen 5 grammaa kultaa ja 30 grammaa hopeaa. Molempien korujen valmistamiseen kuluu yhtä kauan aikaa. Raaka-ainekustannusten vähentämisen jälkeen tulo yhdestä kaulakorusta on 80 euroa ja yhdestä rannerenkaasta 100 euroa. Kuinka monta kaulakorua ja kuinka monta rannekorua korusepän kannattaa tehdä, jotta tulot olisivat mahdollisimman suuret? Kuinka suuret tulot tällöin ovat?

RATKAISU

Olkoon x valmistettavien kaulakorujen ja y rannerenkaiden lukumäärä. Kumpikaan lukumäärä ei voi olla negatiivinen, joten tulee olla $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$.

Valmistusmääriä rajaa raaka-aineiden määrä.

Kuluvan kullan määrä on $10x + 5y$. Kultaa on käytettävissä enintään 200 g, joten

$10x + 5y \leqslant 200$.

Kuluvan hopean määrä on $20x + 30y$. Hopeaa on käytettävissä enintään 600 g, joten

$20x + 30y \leqslant 600$.

Mahdollisia valmistusmääriä rajaa neljä epäyhtälöä:

$x \geqslant 0$
$y \geqslant 0$
$10x + 5y \leqslant 200$
$20x + 30y \leqslant 600$.

Jos koruseppä valmistaa x kaulakorua ja y rannerengasta, tulojen suuruus on $80x + 100y$ euroa. On määritettävä epäyhtälöiden rajaaman tasoalueen piste, jossa lausekkeen arvo on suurin.

Epäyhtälöt $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$ toteutuvat positiivisten koordinaattiakselien rajaamassa tason neljänneksessä.

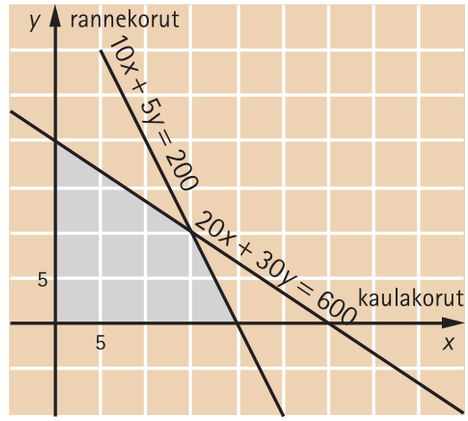
Yhtälöt $10x + 5y = 200$ ja $20x + 30y = 600$ saatetaan piirtämistä varten ratkaistuun muotoon.

$$10x + 5y = 200$$
$$5y = -10x + 200 \quad | : 5$$
$$y = -2x + 40$$

$$20x + 30y = 600$$
$$30y = -20x + 600 \quad | : 30$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 20$$

Epäyhtälö $10x + 5y \leqslant 200$ toteutuu suoralla $10x + 5y = 200$ ja sen alapuolella, sillä origon koordinaatit toteuttavat epäyhtälön:
$10 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 \leqslant 200$.

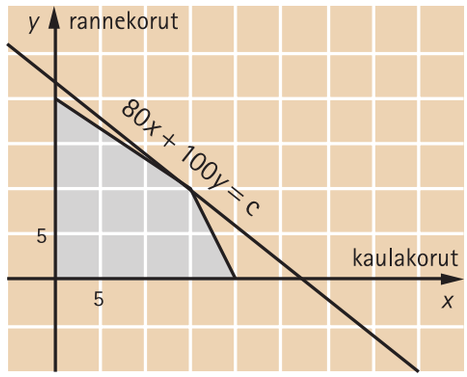
Epäyhtälö $20x + 30y \leqslant 600$ toteutuu suoralla $20x + 30y = 600$ ja sen alapuolella, sillä origon koordinaatit toteuttavat epäyhtälön:
$20 \cdot 0 + 30 \cdot 0 = 0 \leqslant 600$.



Määritetään muotoa $80x + 100y = c$ olevien suorien kulmakerroin. Voidaan olettaa, että $c = 0$.

$$80x + 100y = 0$$
$$100y = -80x \quad | : 100$$
$$y = -\frac{4}{5}x$$

Muotoa $80x + 100y = c$ olevien suorien kulmakerroin on $-\frac{4}{5}$.



Ylin aluetta koskettava suora, jonka kulmakerroin on $-\frac{4}{5}$, kulkee suorien $10x + 5y = 200$ ja $20x + 30y = 600$ leikkauspisteen kautta.

Varmistetaan havainto vertaamalla kulmakertoimia: reunasuorien kulmakertoimet ovat -2 ja $-\frac{2}{3} \approx -0{,}67$, joten kulmakerroin $-\frac{4}{5} = -0{,}8$ on niiden välissä. Siis suorien $80x + 100y = c$ jyrkkyys on reunasuorien jyrkkyyksien välissä.

Ratkaistaan leikkauspisteen koordinaatit.

$$\begin{cases} 10x + 5y = 200 \\ 20x + 30y = 600 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \mid : 5 \\ \mid : 10 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 40 \\ 2x + 3y = 60 \end{cases} \qquad \mid \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} -2x - y = -40 \\ 2x + 3y = 60 \end{cases}$$

$$2y = 20 \qquad \mid : 2$$

$$y = 10$$

$$2x + 10 = 40 \qquad \text{Yhtälöön } 2x + y = 40 \text{ sijoitetaan } y = 10.$$

$$2x = 30 \qquad \mid : 2$$

$$x = 15$$

Tulot ovat suurimmat, kun koruseppä valmistaa 15 kaulakorua ja 10 rannerengasta. Tulojen suuruus on tällöin

$80 \cdot 15 + 100 \cdot 10 = 2\,200$ (euroa).*

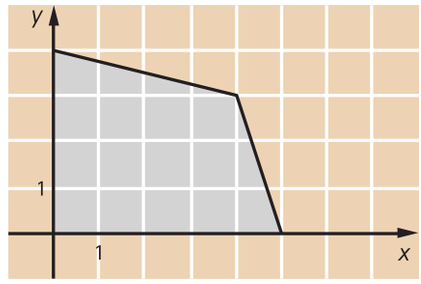
VASTAUS 15 kaulakorua ja 10 rannerengasta, tulot 2 200 euroa

---

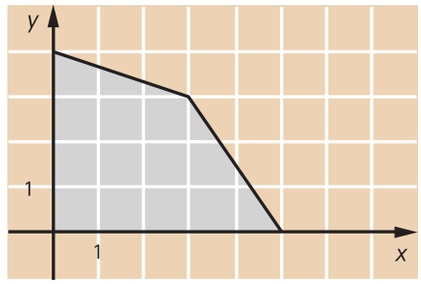
* Toinen tapa löytää lausekkeen $80x + 100y$ suurin arvo kuvion tasoalueessa on laskea lausekkeen arvo kaikissa mahdollisissa pisteissä, joiden kautta ylin muotoa $80x + 100y = c$ oleva suora voi kulkea. Mahdolliset pisteet ovat suoran $10x + 5y = 200$ ja x-akselin leikkauspiste, suoran $20x + 30y = 600$ ja y-akselin leikkauspiste sekä suorien $10x + 5y = 200$ ja $20x + 30y = 600$ leikkauspiste.

Harjoituksia

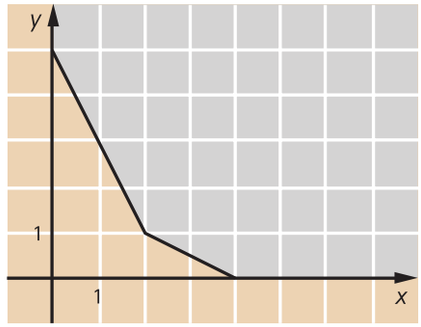
267. Piirrä kuvioon ylimmät muotoa $x + y = c$ ja $4x + y = c$ olevat suorat, jotka koskettavat alueeseen. Mikä on suurin arvo, jonka lauseke a) $x + y$ b) $4x + y$ saa kuvion tasoalueessa?



268. Mikä on suurin arvo, jonka lauseke a) $10x + 20y$
b) $45x + 30y$ c) $240x + 120y$ saa kuvion monikulmiossa?



269. Mikä on pienin arvo, jonka lauseke a) $50x + 20y$
b) $30x + 40y$ saa kuvion harmaassa tasoalueessa?



270. Helsinki, Salo ja Turku ovat likipitäen samalla suoralla. Helsingin ja Turun välimatka on noin 165 km sekä Salon ja Turun välimatka noin 55 km. Helsingissä oli eräänä päivänä lämpötila 17,1 °C ja Turussa 22,3 °C. Lämpötila muuttui tasaisesti Helsingin ja Turun välillä. Mikä oli tällöin lämpötila Salossa? (Ylioppilaskoe, s. 1998)

271. Laske sen kolmion ala, jota rajoittavat y-akseli ja suorat $y = -x + 4$ ja $y = \frac{1}{2}x - 2$. (Ylioppilaskoe, k. 1995)

272. Suora kulkee pisteen $(1, 5)$ kautta leikkaamatta suoraa $2y - x + 1 = 0$. Mikä on suoran yhtälö? Piirrä kuvio.
(Ylioppilaskoe, s. 1997)

273. Määritä suorien $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -1$ ja $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0$ leikkauspiste.

274. Määritä kertoimet a ja b niin, että suorat $ax + by + 5 = 0$ ja $bx + ay = 0$ leikkaavat pisteessä $(-1, 2)$.

275. Kuinka kaukana origosta on suorien $3x - 2y - 16 = 0$ ja $5x - 4y + 16 = 0$ leikkauspiste? (Ylioppilaskoe, s. 1991)

276. Juha ja Maria päättivät jakaa 1 512,17 euron veronalaisen palkkion niin, että ennakonpidätyksen (Juha 29 % ja Maria 37 %) jälkeen Maria saa 15 % enemmän kuin Juha. Kuinka palkkio jaettiin?

277. Määritä lausekkeen $2x + y$ suurin arvo tasoalueessa, jonka määräävät epäyhtälöt $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 7$ ja $3x + 2y \leqslant 16$.

278. Potilas ostaa apteekista kahta lääkettä, joista toinen kuuluu peruskorvattaviin ja toinen erityiskorvattaviin lääkkeisiin. KELA maksaa peruskorvattavista lääkekuluista puolet 8,41 € ylittävästä osasta ja erityiskorvattavista lääkekuluista 75 % osasta, joka ylittää 4,20 €. Mitkä olivat lääkkeiden hinnat, kun ne yhteensä maksoivat 51,01 € ja potilaan maksettavaksi jäi yhteensä 23,16 €?
(Ylioppilaskoe, k. 2003)

279. Uutuustuotetta myytiin tammikuussa 7 817 kappaletta ja huhtikuussa 13 238 kappaletta. Ennusta joulukuun myynti tuhannen kappaleen tarkkuudella olettaen, että myynti kasvaa a) lineaarisesti b) eksponentiaalisesti.

280. Pisteiden $(-2, 11)$ ja $(7, -1)$ kautta kulkeva suora muodostaa koordinaattiakselien kanssa kolmion. a) Muodosta suoran yhtälö. b) Määritä syntyneen kolmion sivujen pituudet. (Ylioppilaskoe, k. 2001)

281. Lämpömittaria tutkittiin tarkkuusmittarin avulla. Kun lämpömittari näytti $-9{,}9$ °C, oikea lämpötila oli $-9{,}2$ °C. Kun lämpömittari näytti $18{,}5$ °C, oikea lämpötila oli $18{,}1$ °C. Oletetaan, että oikean lämpötilan ja lämpömittarin lukeman välinen riippuvuus on lineaarinen.

a) Johda lauseke, jolla oikea lämpötila y voidaan laskea, kun lämpömittarin lukema x tunnetaan. Ilmoita esiintyvät kertoimet neljän desimaalin tarkkuudella.

b) Missä lämpötilassa lämpömittari näyttää aivan oikein? (Ylioppilaskoe, k. 2005)

282. Ratkaise graafisesti epäyhtälöryhmä

$$\begin{aligned} y &\geqslant 0 \\ x &\geqslant -y \\ 2y - x &\leqslant 6 \\ 3x + y &\leqslant 3 \end{aligned}$$

ja laske syntyneen alueen pinta-ala.
(Ylioppilaskoe, k. 2003)

283. 1,0 kilogrammaan vettä on lisättävä 2,0-prosenttista ja 12,0-prosenttista suolaliuosta niin, että saadaan 8,0-prosenttista suolaliuosta. Ilmaise lisättävän 12,0-prosenttisen liuoksen määrä y (kg) lisätyn 2,0-prosenttisen liuoksen määrän x (kg) funktiona. Piirrä funktion kuvaaja.

284. Kotileipomo valmistaa kahta luomutuotetta, terveyspullia ja terveyssämpylöitä. Kymmenen terveyspullan taikinaan tarvitaan 300 g luomuvehnäjauhoja ja 150 g luomuohrajauhoja ja kymmenen sämpylän taikinaan 100 g samoja vehnä- ja 400 g ohrajauhoja. Leipomolla on rajallinen määrä jauhoja, 30 kg vehnäjauhoja ja 36 kg ohrajauhoja. Terveyspullan tuotto leipomolle on 0,45 € ja terveyssämpylän 0,25 €. Kuinka paljon kumpaakin tuotetta leipomon tulisi valmistaa, jotta tuotto olisi suurin mahdollinen? Miten käy jauhovaraston, jos valmistetaan vain terveyssämpylöitä?
(Ylioppilaskoe, s. 2003)

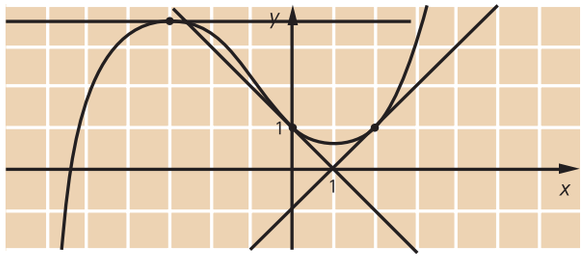
Derivaatta ja funktion kulku

1. Kuviossa on erään funktion f kuvaaja. Päättele kuvaajasta

a) funktion arvo kohdassa nolla

b) funktion nollakohta

c) $f(-3)$.



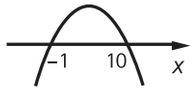
2. Määritä edellisen tehtävän kuvioon piirrettyjen tangenttien avulla

a) funktion f derivaatta kohdassa 2 b) $f'(0)$ c) $f'(-3)$.

3. Derivoi funktio $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ ja määritä funktion f derivaatta kohdassa -1.

4. Määritä paraabelin $y = x^2 - 4x + 3$ huippu.

5. Kuviossa on erään funktion f derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja. Täydennä derivaattafunktion merkkikaavio ja päättele sen avulla, missä funktio f on kasvava ja missä vähenevä.



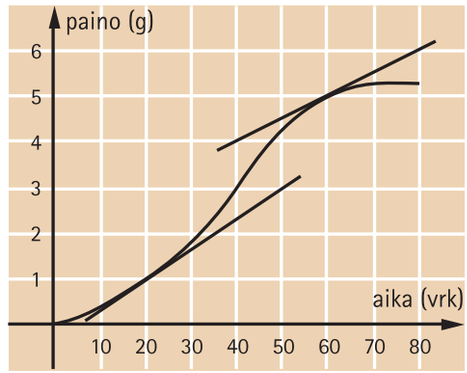
		–1		10	
$f'(x)$					
$f(x)$					

Tehtävien vastaukset ovat seuraavalla sivulla.

Kasvunopeus ja derivaatta

ESIMERKKI 1

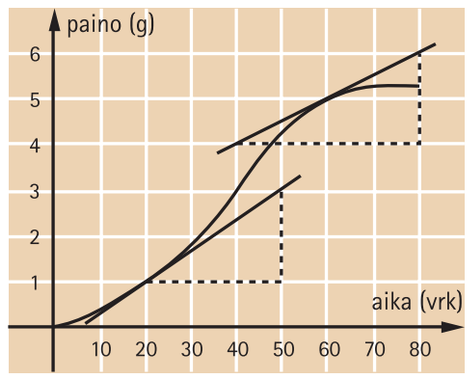
Kuviossa on vehnäkasvin kuivapaino oraan puhkeamista seuraavan 80 vuorokauden aikana. Päättele kasvukäyrälle piirretyistä tangenteista, millä nopeudella kasvin kuivapaino lisääntyy 20 ja 60 vuorokauden kuluttua taimen puhkeamisesta.



RATKAISU

Käyrälle ajanhetken 20 kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on noin $\frac{2}{30} \approx 0{,}07$. Kun taimen puhkeamisesta on kulunut 20 vuorokautta, paino lisääntyy nopeudella 0,07 g/vrk.

Ajanhetken 60 kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on noin $\frac{2}{40} = 0{,}05$. Kun taimen puhkeamisesta on kulunut 60 vuorokautta, paino lisääntyy nopeudella 0,05 g/vrk.



VASTAUS

0,07 g/vrk ja 0,05 g/vrk

TAIDANKO? VASTAUKSET

1. a) 1 b) $x \approx -5{,}4$ c) $f(-3) \approx 3{,}6$

2. a) 1 b) -1 c) 0

3. $f'(x) = 15x^2 - 6x + 4$, $f'(-1) = 25$

4. $(2, -1)$

5. Funktio f on kasvava, kun $-1 \leqslant x \leqslant 10$, ja vähenevä, kun $x \leqslant -1$ tai $x \geqslant 10$.

		-1		10	
$f'(x)$		$-$	$+$		$-$
$f(x)$		↘	↗		↘

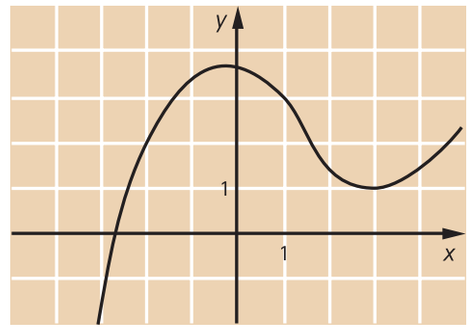
Kasvukäyrästä saadaan selville kasvunopeus jollain hetkellä, kun piirretään kasvukäyrää sivuava suora eli käyrän tangentti. Kasvunopeuden ilmaisee tangentin kulmakerroin.

Derivaatan määritelmä

Funktion f kuvaajalle muuttujan arvon a kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on *funktion f derivaatta kohdassa a*.
Funktion f derivaatta kohdassa a merkitään $f'(a)$.

ESIMERKKI 2

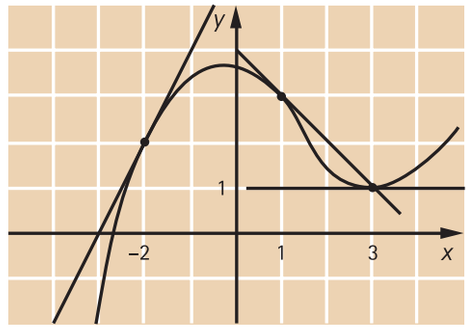
Kuviossa on erään funktion f kuvaaja. Määritä graafisesti funktion f derivaatta kohdissa -2, 1 ja 3.



RATKAISU

Muuttujan arvon -2 kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on noin 2. Siis $f'(-2) \approx 2$.

Muuttujan arvon 1 kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on noin -1. Siis $f'(1) \approx -1$.



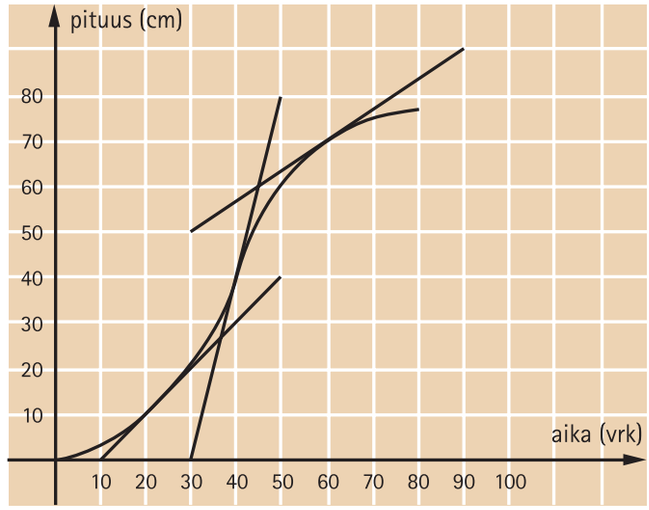
Muuttujan arvon 3 kohdalle piirretty tangentti on x-akselin suuntainen, joten sen kulmakerroin on 0. Siis $f'(3) = 0$.

VASTAUS

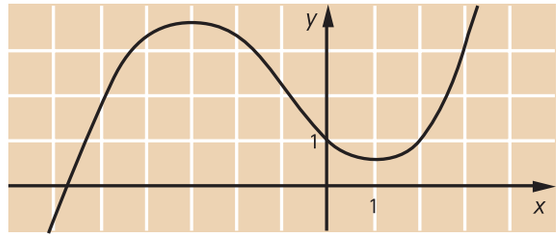
$f'(-2) \approx 2$, $f'(1) \approx -1$, $f'(3) = 0$

Harjoituksia

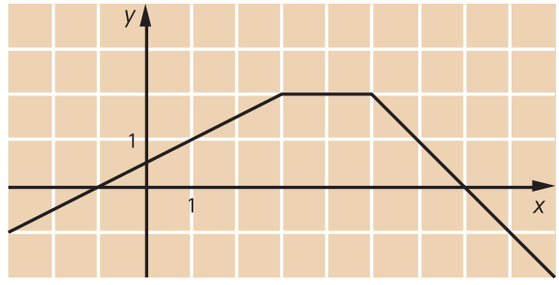
285. a) Päättele kasvukäyrälle piirretyistä tangenteista kasvin kasvunopeus 20 ja 60 vuorokauden kuluttua taimen puhkeamisesta.
b) Kuvioon on piirretty suurinta kasvunopeutta vastaava tangentti. Mikä suurin kasvunopeus oli?



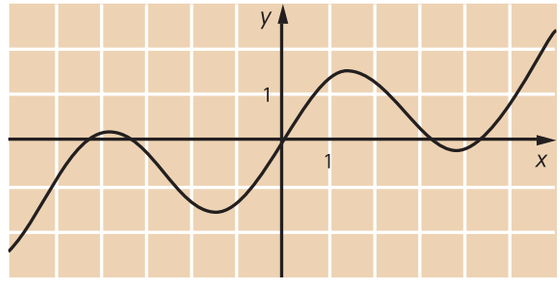
286. Määritä funktion f kuvaajasta
a) $f(-3)$ ja $f'(-3)$
b) $f(1)$ ja $f'(1)$
c) $f(2)$ ja $f'(2)$.



287. Funktion g kuvaaja muodostuu janasta ja kahdesta puolisuorasta. Mikä funktion g derivaatta $g'(x)$ on, kun
a) $x < 3$ b) $3 < x < 5$
c) $x > 5$?



288. Oheisena on väliä $-6 \leqslant x \leqslant 6$ vastaava osa erään funktion kuvaajasta $y = f(x)$. Määritä kuvion perusteella funktion nollakohdat; niistä pienin olkoon x_1. Määritä edelleen derivaatan arvo $f'(x_1)$. Vastaukset yhden desimaalin tarkkuudella.
(Ylioppilaskoe, k. 1994)



Polynomifunktion derivaatta

Derivaattafunktio

Funktio $f'(x)$, jonka arvo kohdassa x on funktion f derivaatta kohdassa x, on funktion f *derivaattafunktio*. Derivaattafunktion muodostamista kutsutaan *derivoimiseksi*.

Funktion f derivaatta kohdassa a lasketaan niin, että muuttujan arvo a sijoitetaan derivaattafunktion $f'(x)$ lausekkeeseen.

Polynomifunktion derivoiminen

Polynomifunktio derivoidaan termeittäin käyttäen potenssin derivointikaavaa:

$$\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}.$$

Eksponentti pienenee yhdellä ja alkuperäinen eksponentti tulee potenssin kertoimeksi.

Siis:

$\mathrm{D}c = 0$ (c vakio), $\mathrm{D}x = 1$, $\mathrm{D}x^2 = 2x$, $\mathrm{D}x^3 = 3x^2$, $\mathrm{D}x^4 = 4x^3$ jne.

ESIMERKKI 1 Määritä funktion $f(x) = x^2 + 5x + 8$ kuvaajalle pisteeseen $(-1, 4)$ piirretyn tangentin a) kulmakerroin b) yhtälö.

RATKAISU

a) Tangentin kulmakerroin on funktion derivaatta kohdassa -1.

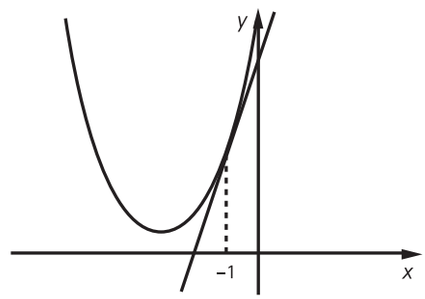
Derivoidaan funktio $f(x)$.

$f'(x) = 2x + 5 \cdot 1 + 0 = 2x + 5$

Derivaattafunktioon sijoitetaan $x = -1$.

$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 5 = 3$

Tangentin kulmakerroin on 3.



b) Tangentti kulkee pisteen $(-1, 4)$ kautta, ja tangentin kulmakerroin on 3. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$y - y_1 = k(x - x_1)$ Sijoitetaan kulmakerroin $k = 3$ ja pisteen $(-1, 4)$ koordinaatit $x_1 = -1,\ y_1 = 4$.

$y - 4 = 3(x - (-1))$

$y - 4 = 3x + 3$

$y = 3x + 7$

VASTAUS a) 3 b) $y = 3x + 7$

ESIMERKKI 2 Derivoi funktio $f(x) = x^2(x - 3)^2$.

RATKAISU $f(x) = x^2(x - 3)^2 = x^2(x - 3)(x - 3)$ Funktion lauseke saatetaan polynomin muotoon suorittamalla kertolasku.

$= x^2(x^2 - 3x - 3x + 9) = x^2(x^2 - 6x + 9)$

$= x^4 - 6x^3 + 9x^2$

Derivoidaan.

$f'(x) = 4x^3 - 6 \cdot 3x^2 + 9 \cdot 2x = 4x^3 - 18x^2 + 18x$

VASTAUS $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 18x$

ESIMERKKI 3 Pallon muotoista ilmapalloa täytetään niin, että pallon säde kasvaa tasaisesti senttimetrin sekunnissa. Oletetaan, että säde alussa oli 0. Millä nopeudella pallon tilavuus kasvaa viiden sekunnin kuluttua ja 20 sekunnin kuluttua?

RATKAISU Pallon tilavuus on $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, missä r on pallon säde.

Ilmapallon säde t sekunnin kuluttua on t senttimetriä, joten pallon tilavuus t sekunnin kuluttua on $V(t) = \frac{4}{3}\pi t^3$ (cm^3).

Tilavuuden kasvunopeuden ilmaisee derivaattafunktio $V'(t)$.

$$V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3t^2 = 4\pi t^2$$

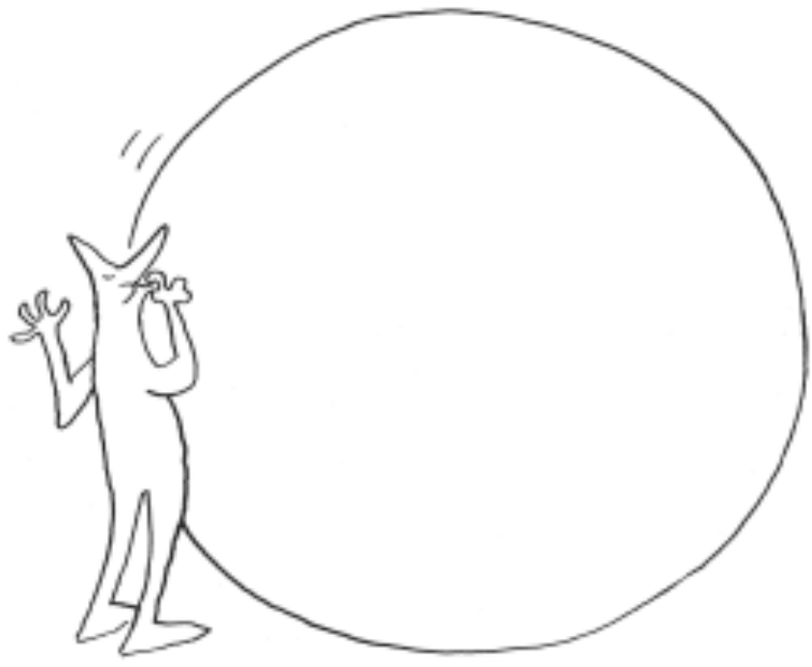
Tilavuuden kasvunopeus viiden sekunnin kuluttua on

$V'(5) = 4\pi \cdot 5^2 \approx 310$ (cm^3/s).

Tilavuuden kasvunopeus 20 sekunnin kuluttua on

$V'(20) = 4\pi \cdot 20^2 \approx 5\,000$ (cm^3/s).

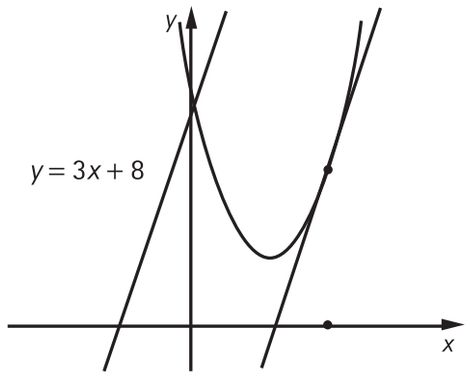
VASTAUS 310 cm^3/s ja 5 000 cm^3/s



ESIMERKKI 4 Mihin paraabelin $y = x^2 - 5x + 9$ pisteeseen piirretty paraabelin tangentti on suoran $y = 3x + 8$ suuntainen?

RATKAISU Paraabeli $y = x^2 - 5x + 9$ on funktion $f(x) = x^2 - 5x + 9$ kuvaaja.

Kuvaajalle piirretty tangentti on suoran $y = 3x + 8$ suuntainen, jos tangentin kulmakerroin on yhtä suuri kuin suoran kulmakerroin 3.



Muuttujan arvon x kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion f derivaatta kohdassa x. On siis määritettävä sellainen x:n arvo, että $f'(x) = 3$.

Derivoidaan funktio f.

$f'(x) = 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 2x - 5$

Ratkaistaan, millä x:n arvolla on $f'(x) = 3$.

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 3 \\ 2x &= 8 \qquad | : 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Tangentti piirretään paraabelin pisteeseen, jonka x-koordinaatti on 4. Pisteen y-koordinaatti on

$y = 4^2 - 5 \cdot 4 + 9 = 5.$ Yhtälöön $y = x^2 - 5x + 9$ sijoitetaan $x = 4$.

Tangentti piirretään paraabelin pisteeseen (4, 5).

VASTAUS (4, 5)

Harjoituksia

289. Olkoon $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$. Laske $P(-2)$ ja $P'(-2)$.

290. Esitä funktio $f(x) = \dfrac{x^2(9x^2 - 8x)}{12}$ polynomina ja derivoi funktio f.

291. Määritä paraabelille $y = x^2 + 5x + 4$ pisteeseen $(-1, 0)$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

292. Missä kohdassa funktion $f(x) = x(x + 1)$ derivaatta saa arvon 2?

293. Olkoon $g(x) = x(3 - x^2)$. Määritä funktion g derivaatta kohdassa 0 ja derivaattafunktion nollakohdat.

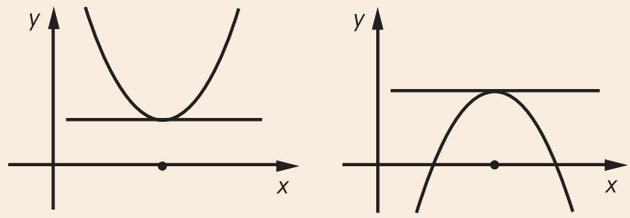
294. Erään kasvin korkeus senttimetreinä t viikon kuluttua taimen puhkeamisesta voidaan likimain ennustaa funktiolla $f(t) = -0{,}16t^3 + 2{,}4t^2$. Kuinka korkea kasvi on viiden viikon kuluttua? Millä nopeudella taimi tällöin kasvaa?

Derivaatta ja paraabeli

Paraabelin huipun määrittäminen

Paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ on toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaaja.

Paraabelin huippuun piirretty tangentti on x-akselin suuntainen, joten huipun kohdalla funktion f derivaatta on nolla.



Paraabelin huipun x-koordinaatti löydetään niin, että derivoidaan funktio $f(x) = ax^2 + bx + c$ ja ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

Huipun y-koordinaatti saadaan sijoittamalla x-koordinaatti paraabelin yhtälöön $y = ax^2 + bx + c$.

ESIMERKKI 1 Määritä paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x - 10$ huippu.

RATKAISU Paraabeli $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x - 10$ on funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x - 10$ kuvaaja. Huipun x-koordinaatti on derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohta.

Derivoidaan.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x - 6 \cdot 1 - 0 = x - 6$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$x - 6 = 0$

$x = 6$

Huipun y-koordinaatti on

$y = \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 - 10$ Yhtälöön $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x - 10$ sijoitetaan $x = 6$.

$= \frac{1}{2} \cdot 36 - 36 - 10 = 18 - 36 - 10 = -28.$

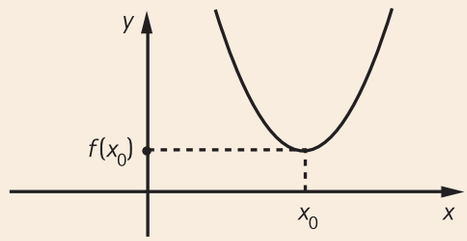
Paraabelin huippu on pisteessä $(6, -28)$.

VASTAUS $(6, -28)$

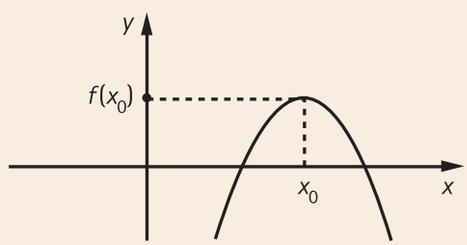
Toisen asteen polynomifunktion suurin ja pienin arvo

Toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ suurin ja pienin arvo päätellään hahmotellun kuvaajaparaabelin avulla.

Jos $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin. Funktio f saa pienimmän arvon kohdassa x_0, missä x_0 on huipun x-koordinaatti. Pienin arvo on huipun y-koordinaatti $f(x_0)$.



Jos $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin. Funktio f saa suurimman arvon kohdassa x_0, missä x_0 on huipun x-koordinaatti. Suurin arvo on huipun y-koordinaatti $f(x_0)$.



ESIMERKKI 2 Määritä funktion $f(x) = (x-1)^2 + x$ pienin arvo.

RATKAISU

$f(x) = (x-1)^2 + x$ Saatetaan funktion lauseke polynomin muotoon suorittamalla kertolasku.

$= (x-1)(x-1) + x$

$= x^2 - x - x + 1 + x$

$= x^2 - x + 1$

Funktio f on toisen asteen polynomifunktio. Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa pienimmän arvon huipun kohdalla.

Derivoidaan funktio $f(x)$.

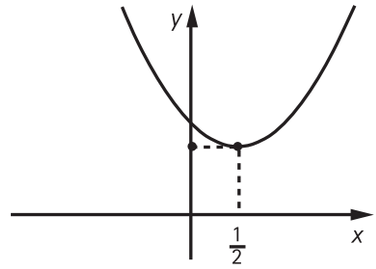
$f'(x) = 2x - 1$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$2x - 1 = 0$

$2x = 1 \quad | : 2$

$x = \frac{1}{2}$



Funktion f pienin arvo on

$f(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1$

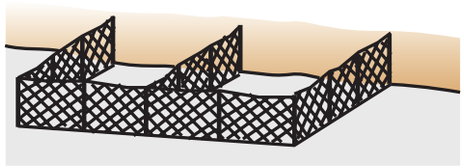
$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} = 0{,}75.$

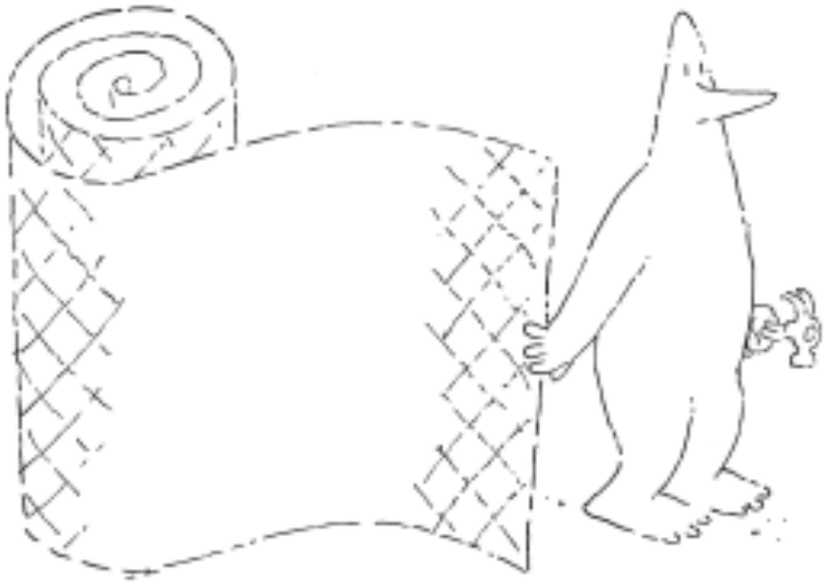
Arvo voidaan laskea myös käyttämällä desimaalimuotoa $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

VASTAUS $\frac{3}{4} = 0{,}75$

ESIMERKKI 3

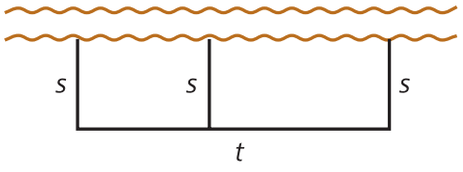
Joen rantaan aidataan suorakulmion muotoinen aitaus, joka vielä jaetaan jokea vastaan kohtisuoralla väliaidalla kahteen osaan. Aitaa on käytettävissä 48 metriä. Aitauksen pinta-ala halutaan mahdollisimman suureksi. Kuinka aitauksen mitat on valittava?





RATKAISU

Olkoon jokea vastaan kohtisuoran sivun pituus s metriä ja joen suuntaisen sivun pituus t metriä.



Aitauksen pinta-ala on $A = st$.

Aitaukseen käytetyn aidan pituus on $s + s + s + t = 3s + t$.

Koska aitaa oli 48 metriä, niin

$3s + t = 48$ Ratkaistaan yhtälöstä t.

$t = 48 - 3s$.

Aitauksen pinta-ala muuttujan s funktiona on

$A(s) = st = s(48 - 3s) = 48s - 3s^2$.

Funktion $A(s)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa suurimman arvon huipun kohdalla.

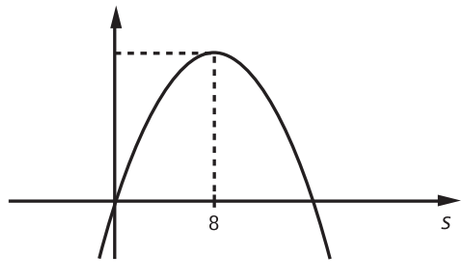
Derivoidaan funktio $A(s)$.

$A'(s) = 48 - 6s$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$48 - 6s = 0$

$s = 8$



Funktio $A(s)$ saa suurimman arvonsa kohdassa $s = 8$.

Pinta-ala on suurin, kun jokea vastaan kohtisuora sivun pituus on 8 m. Joen suuntaisen sivun pituus on tällöin $t = 48 - 3 \cdot 8 = 24$ (m).

VASTAUS jokea vastaan kohtisuorat sivut 8,0 m ja joen suuntainen sivu 24,0 m

Harjoituksia

295. Määritä paraabelin $y = x^2 - 6x + 8$ huippu ja piirrä paraabeli.

296. Jokiuoman poikkileikkaus on paraabelin $y = 0{,}025x^2 - x$ x-akselin alapuolisen osan muotoinen. Yksikkönä on metri. Kuinka syvä joki on?

297. Määritä funktion $f(x) = -3x^2 + 24x + 2$ suurin arvo.

298. Ilmaise lausekkeena luvun x neliön ja luvun x summa. Millä x:n arvolla summa on pienin? Mikä summan pienin arvo on?

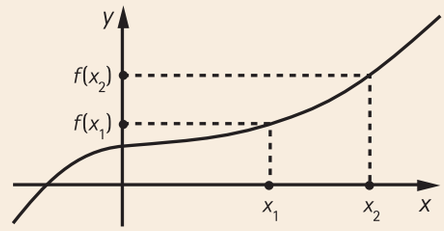
299. Määritä vakio a niin, että paraabelin $y = x^2 - 10x + a$ huippu on suoralla $y = 4$.

Funktion kulun tutkiminen

Kasvava ja vähenevä funktio

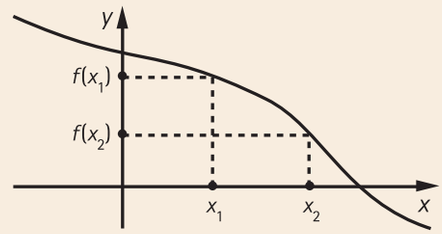
Funktio f on *kasvava*, jos muuttujan arvojen suuretessa funktion f arvot suurenevat.

Kun verrataan kasvavan funktion arvoja kahdessa kohdassa, niin funktion arvo on suurempi oikeanpuoleisessa kohdassa.



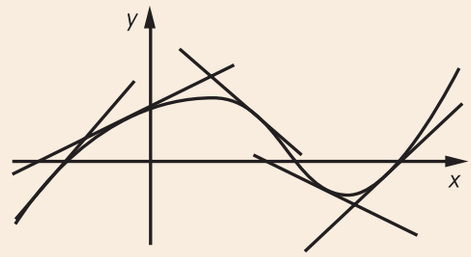
Funktio f on *vähenevä*, jos muuttujan arvojen suuretessa funktion f arvot pienenevät.

Kun verrataan vähenevän funktion arvoja kahdessa kohdassa, niin funktion arvo on suurempi vasemmanpuoleisessa kohdassa.



Kasvaminen, väheneminen ja derivaatan merkki

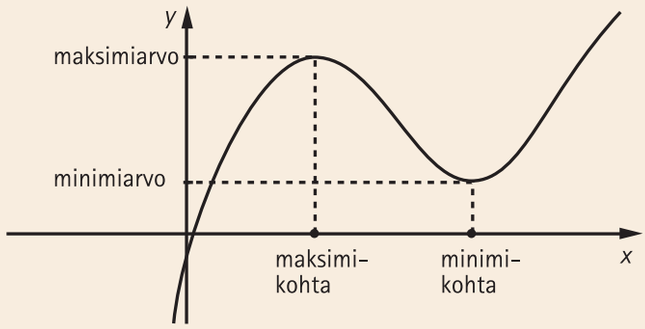
- Funktio on kasvava siellä, missä derivaatta on positiivinen.
- Funktio on vähenevä siellä, missä derivaatta on negatiivinen.



Funktion ääriarvokohdat ja ääriarvot

Kohta, jossa funktio vasemmalta oikealle kuljettaessa muuttuu kasvavasta väheneväksi, on funktion *maksimikohta*.
Funktion arvo maksimikohdassa on *maksimiarvo*.

Kohta, jossa funktio vasemmalta oikealle kuljettaessa muuttuu vähenevästä kasvavaksi, on funktion *minimikohta*.
Funktion arvo minimikohdassa on *minimiarvo*.



Funktion maksimi- ja minimikohdat ovat funktion *ääriarvokohtia*.
Funktion maksimi- ja minimiarvo ovat funktion *ääriarvoja*.

ESIMERKKI 1 Missä funktio $f(x) = 6x^2 - x^3$ on kasvava ja missä vähenevä? Määritä funktion f ääriarvokohdat ja ääriarvot. Hahmottele funktion f kuvaaja.

RATKAISU Selvitetään funktion $f(x) = 6x^2 - x^3$ derivaattafunktion arvojen merkit.

Derivoidaan.

$f'(x) = 6 \cdot 2x - 3x^2 = 12x - 3x^2$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$12x - 3x^2 = 0$

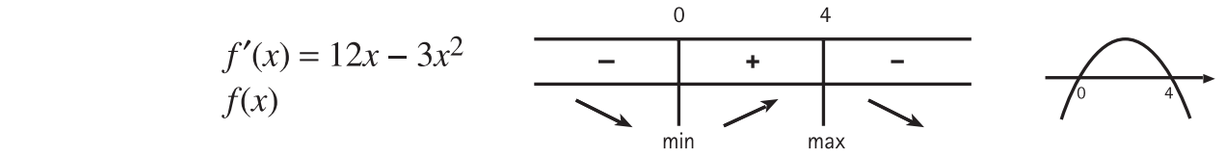
$x(12 - 3x) = 0$

$x = 0$ tai $12 - 3x = 0$

$x = 0$ tai $3x = 12$

$x = 0$ tai $x = 4$

Derivaattafunktion $f'(x) = 12x - 3x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Laaditaan derivaattafunktion merkkikaavio ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi.

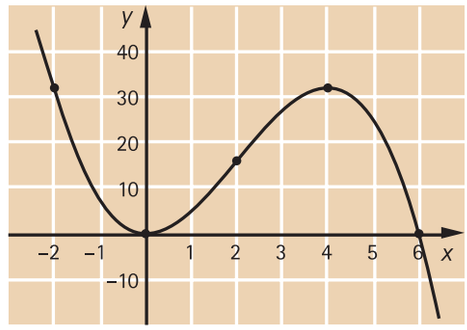


Funktio f on kasvava, kun $0 \leqslant x \leqslant 4$. Funktio f on vähenevä, kun $x \leqslant 0$ tai $x \geqslant 4$.

Kohta $x = 0$ on minimikohta. Vastaava minimiarvo on $f(0) = 0$.
Kohta $x = 4$ on maksimikohta. Vastaava maksimiarvo on
$f(4) = 6 \cdot 4^2 - 4^3 = 32$.

Kuvaajan hahmottelemiseksi riittää, kun määritetään yksi kuvaajan piste ääriarvopisteiden välistä ja niiden molemmilta puolilta.

x	$f(x) = 6x^2 - x^3$
–2	32
0	0
2	16
4	32
6	0



VASTAUS

Kasvava, kun $0 \leqslant x \leqslant 4$. Vähenevä, kun $x \leqslant 0$ tai $x \geqslant 4$.
Minimikohta $x = 0$ ja minimiarvo $f(0) = 0$.
Maksimikohta $x = 4$ ja maksimiarvo $f(4) = 32$.

ESIMERKKI 2 Kumpi funktion $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 1\,000\,000$ arvoista $f(-1{,}9997)$ ja $f(-1{,}9998)$ on suurempi?

RATKAISU Selvitetään funktion f kulku.

Derivoidaan.

$f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 1\,000\,000$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$

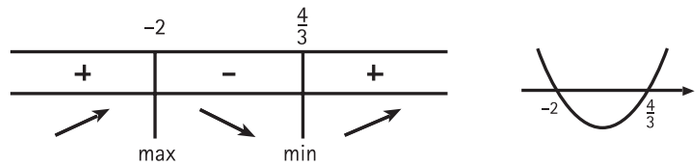
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$3x^2 + 2x - 8 = 0$

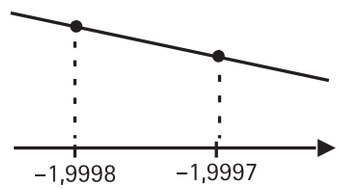
Ratkaisukaavalla:

$x = -2$ tai $x = \frac{4}{3}$.

Derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Muodostetaan derivaattafunktion merkkikaavio ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi.



Kohdat $-1{,}9997$ ja $-1{,}9998$ ovat molemmat välillä $-2 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$, jolla funktio f on vähenevä. Koska $-1{,}9998 < -1{,}9997$, funktio f saa suuremman arvon kohdassa $-1{,}9998$.



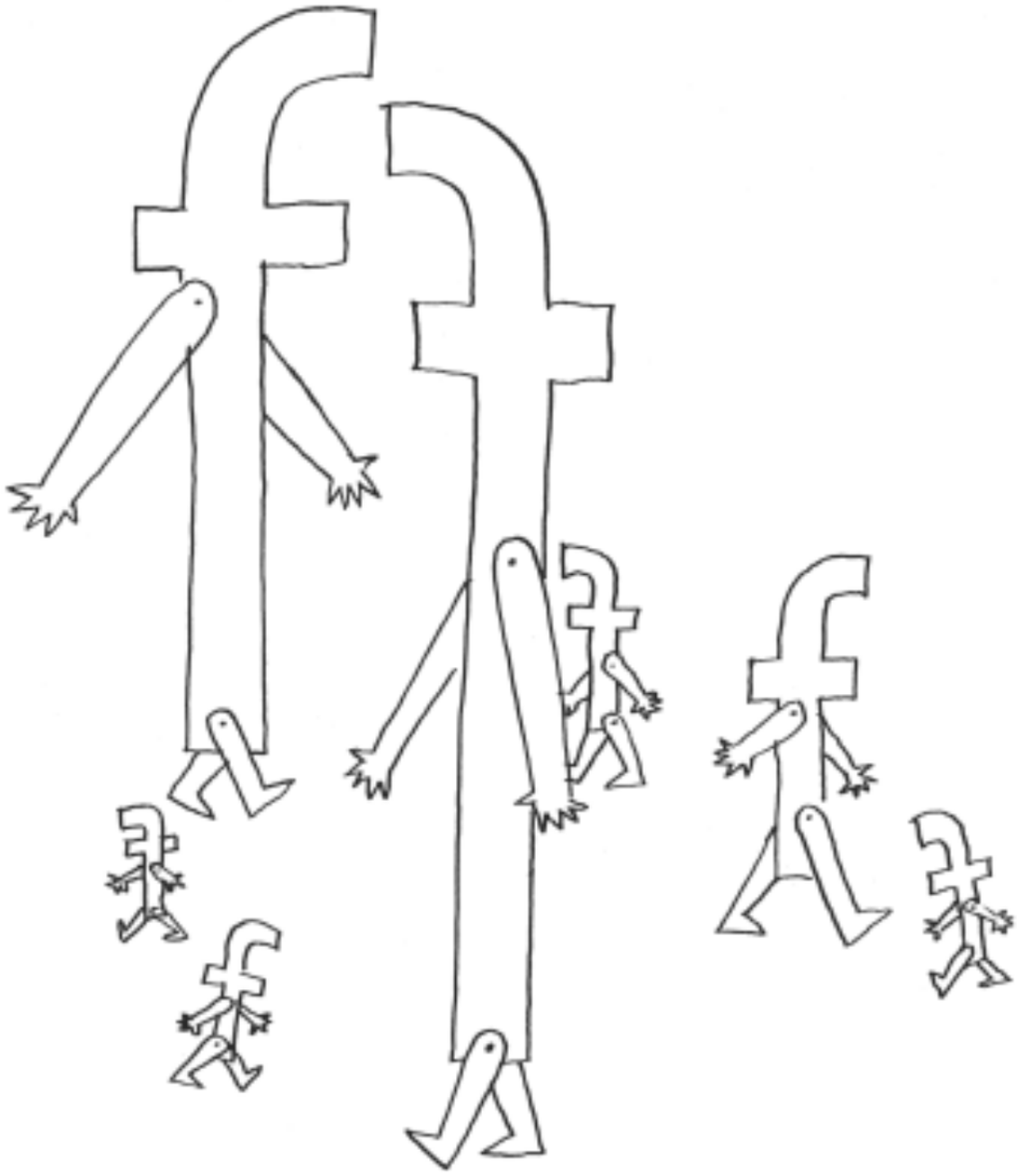
VASTAUS $f(-1{,}9998)$

Harjoituksia

300. Missä funktio $f(x) = -3x^2 + 24x - 17$ on kasvava ja missä vähenevä? Määritä funktion f ääriarvot.

301. Missä funktio $f(x) = x^3 + 6x^2 - 5$ on kasvava ja missä vähenevä? Määritä funktion f ääriarvokohdat. Piirrä funktion f kuvaaja.

302. Missä funktio $g(x) = -x^3 + x^2 + 5x$ on kasvava ja missä vähenevä?



Funktion suurin ja pienin arvo välillä

Suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen välillä

Kohta, jossa funktio saa jollakin välillä suurimman tai pienimmän arvon, päätellään välille rajatusta funktion kulkukaaviosta. Mahdollisia kohtia saattaa olla useampia, jolloin funktion arvo lasketaan niistä jokaisessa ja arvoja vertaamalla löydetään suurin (pienin) arvo.

ESIMERKKI 1 Missä kohdassa välillä $1 \leqslant x \leqslant 8$ funktio $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 30$ saa pienimmän ja missä kohdassa suurimman arvon?

RATKAISU Derivoidaan funktio $f(x)$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$

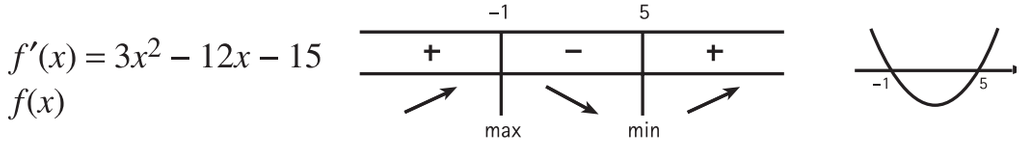
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$3x^2 - 12x - 15 = 0 \qquad | : 3$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

Ratkaisukaavalla saadaan $x = -1$ tai $x = 5$.

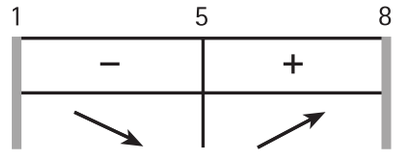
Derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Laaditaan derivaattafunktion $f'(x)$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion $f(x)$ kulkukaavioksi.



Rajataan kulkukaavio välille $1 \leqslant x \leqslant 8$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$

$f(x)$



Kulkukaavion mukaan funktio f saa välillä $1 \leqslant x \leqslant 8$ pienimmän arvon kohdassa $x = 5$.

Suurimman arvon funktio f saa jommassakummassa välin päätepisteistä. Lasketaan arvot molemmissa:

$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 + 30 = 10$

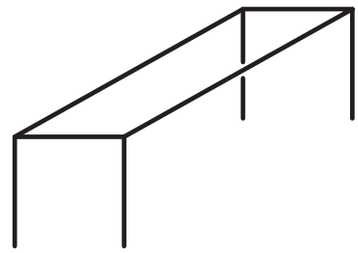
$f(8) = 8^3 - 6 \cdot 8^2 - 15 \cdot 8 + 30 = 38.$

Arvo $f(8)$ on suurempi. Funktio saa suurimman arvon kohdassa $x = 8$.

VASTAUS pienin arvo kohdassa $x = 5$ ja suurin arvo kohdassa $x = 8$

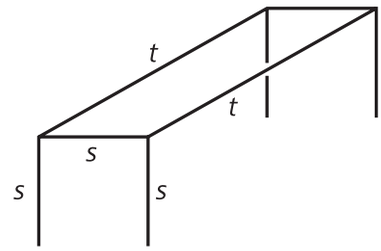
ESIMERKKI 2

Vajalle, jonka päädyt ovat neliöitä, rakennetaan kuvion mukainen kehikko. Pystytuet tehdään teräsputkesta, joka maksaa 40 €/m, ja katon kehys kiskosta, joka maksaa 20 €/m. Putken ja kiskon hankkimiseen on käytettävissä 540 euroa. Määritä vajan mitat niin, että sen tilavuus on mahdollisimman suuri.



RATKAISU

Olkoon s rakennuksen päätyneliön sivu ja t rakennuksen pituus.



Rakennuksen tilavuus on päätyneliön pinta-alan ja rakennuksen pituuden tulo:

$V = s^2t.$

Pystytuet tehdään putkesta, joka maksaa 40 €/m. Pystytukiin kuluu rahaa $4s \cdot 40 = 160s$ (euroa).

Katon kehys tehdään kiskosta, joka maksaa 20 €/m. Katon kehykseen kuluu rahaa $2s \cdot 20 + 2t \cdot 20 = 40s + 40t$ (euroa).

Koko kehikon rakentamiseen kuluu rahaa

$160s + 40s + 40t = 200s + 40t$ (euroa).

Rahaa on käytettävissä 540 euroa.

$200s + 40t = 540$ Ratkaistaan yhtälöstä t.

$40t = 540 - 200s$ $\mid : 40$

$t = 13{,}5 - 5s$

Vajan tilavuus muuttujan s funktiona on

$V(s) = s^2t = s^2(13{,}5 - 5s) = 13{,}5s^2 - 5s^3.$

Muuttujan s mahdollisten arvojen rajat määräytyvät ääritapauksista $s = 0$ ja $t = 0$. Kun $t = 0$, niin

$$200s + 40 \cdot 0 = 540$$

$$200s = 540 \quad | : 200$$

$$s = 2{,}7.$$

Muuttujan s mahdolliset arvot ovat välillä $0 \leqslant s \leqslant 2{,}7$. Määritetään tämän välin kohta, jossa funktion $V(s)$ arvo on suurin.

Derivoidaan funktio $V(s)$.

$$V'(s) = 13{,}5 \cdot 2s - 5 \cdot 3s^2 = 27s - 15s^2$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$27s - 15s^2 = 0$$

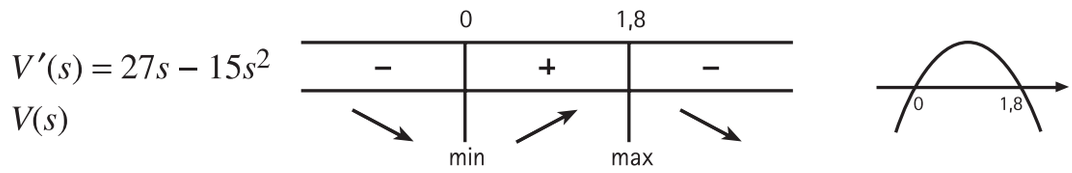
$$s(27 - 15s) = 0$$

$$s = 0 \text{ tai } 27 - 15s = 0$$

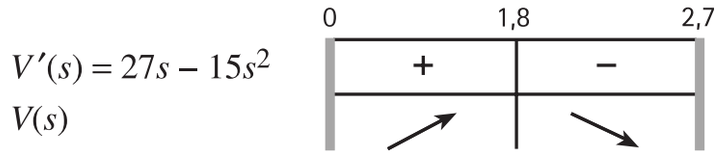
$$s = 0 \text{ tai } -15s = -27$$

$$s = 0 \text{ tai } s = 1{,}8$$

Derivaattafunktion $V'(s) = 27s - 15s^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Laaditaan derivaattafunktion merkkikaavio ja täydennetään se funktion $V(s)$ kulkukaavioksi.



Rajataan kulkukaavio välille $0 \leqslant s \leqslant 2{,}7$.



Funktion $V(s)$ arvo on suurin, kun $s = 1{,}8$.

Kun vajan päätyneliön sivun pituus $s = 1{,}8$, niin vajan pituus on

$t = 13{,}5 - 5 \cdot 1{,}8 = 4{,}5$.

Tilavuus on suurin, kun päätyneliön sivun pituus on 1,8 m ja vajan pituus 4,5 m.

VASTAUS päätyneliön sivu 1,8 m ja vajan pituus 4,5 m

Harjoituksia

303. Määritä funktion $f(x) = x(12 - x^2)$ suurin ja pienin arvo välillä $-4 \leqslant x \leqslant 1$.

304. Missä kohdassa välillä $0 \leqslant x \leqslant 2$ funktio $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ saa suurimman arvon? Mikä suurin arvo on?

305. Määritä funktion $f(x) = x^2 - 4x + 3$ suurin ja pienin arvo välillä
a) $3 \leqslant x \leqslant 5$ b) $0 \leqslant x \leqslant 3$.

306. Olkoon $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$. Laske $f'(\frac{\sqrt{3}}{2})$. Millä x:n arvoilla on $f'(x) = 0$?

(Ylioppilaskoe, s. 2005)

307. Määritä ne kohdat, joissa funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 17$ derivaatta saa arvon 2. (Ylioppilaskoe, k. 2005)

308. Määritä funktion f: $f(x) = 6x - \frac{1}{2}x^2$ suurin ja pienin arvo välillä $0 \leqslant x \leqslant 10$.

(Ylioppilaskoe, k. 1992)

309. Mitä arvoja funktion $-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 1$ derivaatta voi saada?

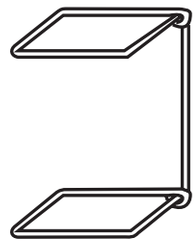
(Ylioppilaskoe, k. 2003)

310. Selvitä, missä funktio $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$ on vähenevä ja missä kasvava, ja päättele, kumpi funktion arvoista $f(-1{,}6666667)$ ja $f(-1{,}6666668)$ on suurempi.

311. Tee selkoa, mitä polynomifunktion derivaatta kertoo funktion kulusta. Osoita, että funktio $f(x) = 5x^3 + \frac{13}{2}x^2 + 3x - 12$ on kaikkialla kasvava. (Ylioppilaskoe, s. 2002)

312. Jos painokoneen käyntiä nopeutetaan, niin tuotantokatkokset lisääntyvät. Kun kone oli säädetty painamaan $5\,000$ arkkia tunnissa, kone toimi 20 tuntia vuorokaudessa. Arvioidaan, että jokainen sadan arkin lisäys painonopeudessa vähentää koneen toiminta-aikaa 15 minuutilla. Mille nopeudelle kone tulee säätää, jotta vuorokaudessa painettujen arkkien määrä olisi mahdollisimman suuri?

313. Rautalangasta, jonka pituus on 50 cm, taivutetaan kuvan mukainen kehikko suorakulmaista särmiötä varten. Langan päistä varataan kummastakin 1 cm pientä silmukkaa varten. Särmiön pohja on neliön muotoinen. Miten tämän neliön sivu ja miten kehikon korkeus on valittava, kun särmiön tilavuus halutaan mahdollisimman suureksi?



(Ylioppilaskoe, k. 1993)

314. Pakkauslaatikoita valmistettaessa jää ylimääräisiä $0{,}80$ m pitkiä ja $0{,}50$ m leveitä suorakulmion muotoisia pahvipaloja. Näistä laaditaan kannettomia suorakulmaisen särmiön muotoisia marjalaatikoita leikkaamalla joka nurkasta neliön suuruinen pala pois siten, että neliön sivu vastaa laatikon korkeutta. Kuinka korkea laatikosta tulisi tehdä, jotta saataisiin tilavuudeltaan mahdollisimman suuri laatikko? Kuinka monta litraa marjoja tähän laatikkoon enimmillään mahtuu? (Ylioppilaskoe, s. 2000)

315. Kansainvälisen ilmakuljetusjärjestön IATA:n vaatimusten mukaan matkustamoon otettavan laukun pituuden, leveyden ja korkeuden summa ei saa ylittää 115 cm. Mikä on sellaisen IATA:n hyväksymän laukun suurin tilavuus, jonka korkeus on 20 cm? (Ylioppilaskoe, s. 1995)

316. Kennelin pitäjä tekee koirilleen aitauksen, jossa on rinnakkain viisi samanlaista suorakulmion muotoista osastoa siten, että koko aitauksesta muodostuu suorakulmio. Aita-aineksia on käytettävissä tasan 200 metrin aitaan. Mitkä ovat yhden osaston mitat silloin, kun koko aitauksen ala on mahdollisimman suuri? Mikä on tällöin koko aitauksen ala? (Ylioppilaskoe, s. 2001)

317. Näytä, että käyrillä $y = x^2 + 4x + 5$ ja $y = -x^2 + 3$ on vain yksi yhteinen piste. Määritä tähän pisteeseen asetetun käyrien yhteisen tangentin yhtälö. Piirrä kuvio. (Ylioppilaskoe, k. 2004)

318. Määritä käyrälle $y = x - x^2$ suoran $x + y - 2 = 0$ suuntainen tangentti. Piirrä kuvio. (Ylioppilaskoe, s. 1984)

319. Funktion f kuvaaja on katkeamaton murtoviiva ja $f(0) = 100$. Funktion derivaatta $f'(x)$ on 5 välillä $0 < x < 10$ ja 1 välillä $10 < x < 20$. Laske $f(20)$.

320. a) Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ suurin ja pienin arvo välillä $[0, 2]$.
b) Määritä vakio a siten, että funktion $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + a$ pienin arvo välillä $[0, 2]$ on $-4\frac{1}{2}$. Mikä on tällöin funktion suurin arvo ko. välillä? (Ylioppilaskoe, s. 2002)

321. Mikä yhteys on funktion f derivaatan $f'(a)$ ja pisteeseen $(a, f(a))$ piirretyn funktion f kuvaajan tangentin välillä?
a) Määritä $f'(1)$, kun funktion f kuvaajalla on pisteessä $(1, -\frac{3}{4})$ tangenttina suora $4y + 5x = 2$. b) Voiko funktion f, $f(x) = x^2$ kuvaajalla olla tangenttina suora $y = x - 2$ käyrän jossakin pisteessä? (Ylioppilaskoe, s. 2000)

322. Pienien alumiinista valmistettavien suoran ympyräkartion muotoisten valaisinkupujen korkeuden ja pohjaympyrän halkaisijan summa on 18,6 cm. Määritä kartion pohjaympyrän säde siten, että kartion tilavuus on mahdollisimman suuri. Määritä tämä tilavuus. (Ylioppilaskoe, k. 2006)

323. Golfin pelaaja onnistuu lyönnissään, ja pallo putoaa 50,0 metrin päässä olevaan reikään. Missä kulmassa pallo putoaa reikään, kun lentoradan oletetaan olevan paraabeli? Lentoradan huippu on 20,0 metrin korkeudella. (Ylioppilaskoe, k. 2000)

Todennäköisyys ja tilastot

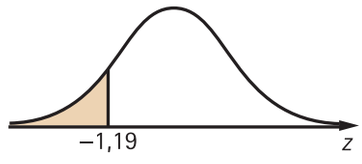
1. Partiolaiset Anni, Bianca, Chao ja Dima ovat telttaretkellä. Heistä vain kaksi mahtuu telttaan. Telttaan pääsijät valitaan arvalla. Luettele kaikki mahdolliset parit, jotka arvonnan tuloksena voidaan saada. Millä todennäköisyydellä Anni ja Bianca pääsevät telttaan?

2. Päätepysäkille saapuu 14 minuutin välein bussi, joka lähtee matkaan seisottuaan 6 minuuttia. Tuomas, joka ei tiedä bussin aikataulua, saapuu pysäkille. Piirrä kuvio, joka havainnollistaa kaikkia mahdollisia saapumishetkiä. Millä todennäköisyydellä Tuomas pääsee heti sisälle bussiin?

3. Suomalaisista 17 % kuuluu veriryhmään B. Mikä on todennäköisyys, että aviopuolisoista
a) molemmat kuuluvat veriryhmään B
b) vain toinen kuuluu veriryhmään B?

4. Sama matematiikan koe pidettiin kahdelle ryhmälle, joista toisessa oli 32 oppilasta ja toisessa 25. Kokeen keskiarvot ryhmissä olivat 7,92 ja 7,49. Mikä kokeen keskiarvo oli kaikkien kokeeseen osallistuneiden joukossa?

5. Oheinen kuvio esittää normitettua normaalijakaumaa. Selvitä normaalijakauman taulukosta (taulukkokirja tai tämän kirjan sivu 291), kuinka monta prosenttia jakaumasta on varjostetulla alueella.



Tehtävien vastaukset ovat seuraavalla sivulla.

Todennäköisyys

Klassinen todennäköisyys

Oletetaan, että satunnaisilmiön kaikki alkeistapaukset ovat yhtä mahdollisia. Tällöin tapahtuman A todennäköisyys on tapahtumalle A suotuisten alkeistapausten lukumäärän suhde kaikkien alkeistapausten lukumäärään.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{tapahtumalle } A \text{ suotuisten alkeistapausten lukumäärä}}{\text{kaikkien alkeistapausten lukumäärä}}$$

ESIMERKKI 1

a) Yhtä noppaa heitetään. Millä todennäköisyydellä saatu silmäluku on 5?
b) Kahta noppaa heitetään. Millä todennäköisyydellä silmälukujen summa on 5?

RATKAISU

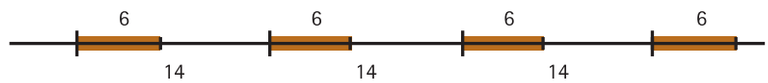
a) Nopanheitolla on kuusi yhtä mahdollista tulosta: silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Tapahtumalla ”silmäluku on 5” on yksi suotuinen alkeistapaus.

$$\mathrm{P}(\text{silmäluku on } 5) = \frac{1}{6}$$

TAIDANKO? VASTAUKSET

1. Mahdolliset parit ovat AB, AC, AD, BC, BD ja CD. Todennäköisyys on $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$.

2.



Suoran 6 yksikön pituiset osat vastaavat aikaa, jonka bussi seisoo pysäkillä.

Todennäköisyys on $\frac{6}{14} \approx 0{,}43$.

3. a) 0,029 b) 0,28 **4.** 7,73 **5.** 11,70 %

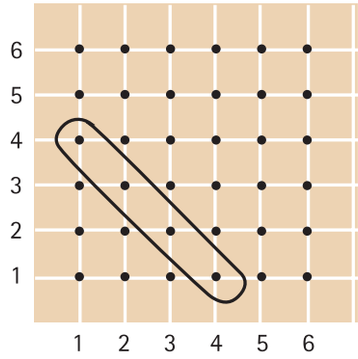
b) Kun heitetään kahta noppaa, mahdollisia heittotuloksia $(1, 1)$, $(1, 2)$ jne. on 36.

Alkeistapaukset voidaan kirjata koordinaatistoon.

Tapahtumalle

”silmälukujen summa on 5”

suotuisia alkeistapauksia on neljä.



$$\text{P(silmälukujen summa on } 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11$$

VASTAUS a) $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$ b) $\frac{1}{9} \approx 0{,}11$*

ESIMERKKI 2 Kyselyn mukaan lukion 417 opiskelijasta 186 harrastaa liikuntaa, 136 musiikkia ja 74 sekä liikuntaa että musiikkia.
a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu liikunnan harrastaja ei harrasta musiikkia?
b) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu lukion opiskelija harrastaa liikuntaa tai musiikkia?

RATKAISU a) Liikunnan harrastajia on 186, ja heistä $186 - 74 = 112$ ei harrasta musiikkia.

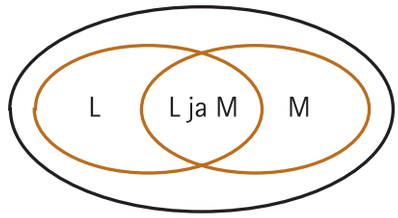
$$\text{P(liikunnan harrastaja ei harrasta musiikkia)} = \frac{112}{186} \approx 0{,}60$$

---

* Klassinen todennäköisyys ilmaistaan supistettuna murtolukuna, jolle lasketaan myös likiarvo.

b) Lukiossa on 417 opiskelijaa.

Opiskelijoista $186 - 74 = 112$ harrastaa liikuntaa, mutta ei harrasta musiikkia. Opiskelijoista $136 - 74 = 62$ harrastaa musiikkia, mutta ei harrasta liikuntaa. Opiskelijoista 74 harrastaa sekä musiikkia että liikuntaa.



Opiskelijoita, jotka harrastavat musiikkia tai liikuntaa, on $112 + 62 + 74 = 248$.*

$$\text{P(opiskelija harrastaa liikuntaa tai musiikkia)} = \frac{248}{417} \approx 0{,}59$$

VASTAUS a) 0,60 b) 0,59

Geometrinen todennäköisyys

Oletetaan, että satunnaiskokeen alkeistapaukset ovat jonkin geometrisen joukon, esimerkiksi janan tai tasoalueen, pisteitä ja jokainen piste on yhtä mahdollinen. Tällöin satunnaiskokeeseen liittyvän tapahtuman A *geometrinen todennäköisyys* on

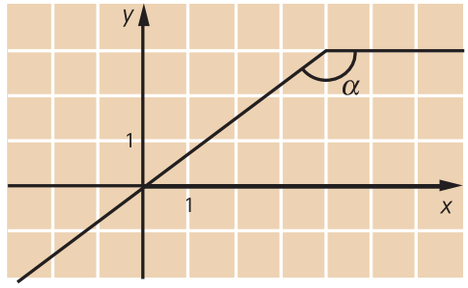
$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{tapahtumalle } A \text{ suotuisen osajoukon mitta}}{\text{koko mahdollisen joukon mitta}}.$$

Tilanteesta riippuen mitta on esimerkiksi pituus, pinta-ala, tilavuus tai kulman suuruus.

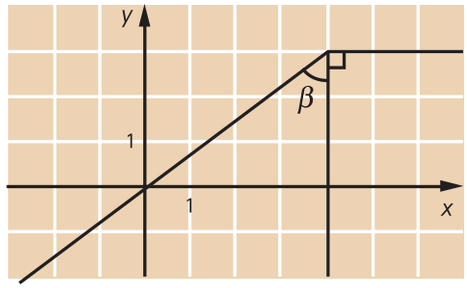
* Toinen tapa laskea liikuntaa tai musiikkia harrastavien lukumäärä on $186 + 136 - 74$. Summassa $186 + 136$ tulee nimittäin ryhmien yhteinen osa, 74 opiskelijaa, lasketuksi kahteen kertaan.

ESIMERKKI 3 Koordinaatiston pisteestä $(4, 3)$ lähdetään satunnaiseen suuntaan ja kuljetaan koko ajan suoraan. Millä todennäköisyydellä ennen pitkää törmätään positiiviseen x-akseliin?

RATKAISU Positiiviseen x-akseliin törmätään, jos lähtösuunta on kuvioon piirrettyjen pisteestä $(4, 3)$ lähtevien puolisuorien välissä. Todennäköisyys on kulman α suuruuden suhde täysikulmaan $360°$.



Kulman α suuruus lasketaan lisäämällä $90°$ kuvion kulmaan β.



$$\tan\beta = \frac{4}{3}$$

$$\beta \approx 53{,}13°$$

Siis $\alpha \approx 90° + 53{,}13° = 143{,}13°$ ja

$$\text{P(törmätään positiiviseen } x\text{-akseliin)} \approx \frac{143{,}13°}{360°} \approx 0{,}40.$$

VASTAUS 0,40

Harjoituksia

324. Kahta noppaa heitetään. Millä todennäköisyydellä ainakin toinen silmäluvuista on suurempi kuin 4?

325. Heitetään tavallista noppaa ja säännöllisen nelitahokkaan (tetraedrin) muotoista noppaa, jonka tahkoissa on silmäluvut 1, 2, 3 ja 4. Millä todennäköisyydellä nelitahokkaan silmäluku on suurempi?

326. Kyselyn mukaan lukion 328 opiskelijasta 241 on tyytyväisiä opetukseen, 208 on tyytyväisiä kouluruokaan ja 167 on tyytyväisiä sekä opetukseen että kouluruokaan.
a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu kouluruokaan tyytyväinen on tyytyväinen myös opetukseen?
b) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu lukion opiskelija on tyytymätön joko opetukseen tai kouluruokaan?

327. Liian raskas taakka katkaisee 12,7 metriä pitkän köyden. Millä todennäköisyydellä toinen köydenpätkä on vähintään 9,0 metrin pituinen?

328. Pieni kivi heitetään neliöön, jonka sivun pituus on 3,0 m. Millä todennäköisyydellä kiven etäisyys neliön sivusta on vähintään 80 cm?

Todennäköisyyksien laskusääntöjä

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntö

Kaksi tapahtumaa ovat toisistaan *riippumattomat*, jos toisen tapahtuman todennäköisyys ei riipu siitä, onko toinen tapahtuma tapahtunut vai ei.

Jos tapahtumat A ja B ovat toisistaan riippumattomat, niin todennäköisyys, että molemmat tapahtuvat, on A:n ja B:n todennäköisyyksien tulo.

$$\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntö pätee myös useammalle toisistaan riippumattomalle tapahtumalle. Todennäköisyys, että ne kaikki tapahtuvat, on todennäköisyyksien tulo.

$$\mathrm{P}(A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ja } \ldots \text{ ja } A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(A_n)$$

ESIMERKKI 1 Ihmiset kuuluvat johonkin neljästä pääveriryhmästä A, B, AB ja O. Suomalaisten veriryhmäjakauma on seuraava: A 44 %, B 17 %, AB 8 % ja O 31 %. Millä todennäköisyydellä molemmat aviopuolisot kuuluvat A-veriryhmään?

RATKAISU Puolisoiden veriryhmät ovat toisistaan riippumattomia.

$$\begin{aligned} \text{P(molemmat A)} &= \text{P(mies A ja vaimo A)} = \text{P(mies A)} \cdot \text{P(vaimo A)} \\ &= 0{,}44 \cdot 0{,}44 \approx 0{,}19 \end{aligned}$$

VASTAUS 0,19

Poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntö

Kaksi tapahtumaa ovat *toisensa poissulkevia* eli *erillisiä*, jos toisen tapahtuessa toinen ei voi tapahtua.

Jos tapahtumat A ja B ovat toisensa poissulkevat, niin todennäköisyys, että jompikumpi niistä tapahtuu, on A:n ja B:n todennäköisyyksien summa.

$$\text{P}(A \text{ tai } B) = \text{P}(A) + \text{P}(B)$$

Sääntö voidaan yleistää: jos tapahtumat A_1, A_2, ... , A_n ovat toisensa poissulkevia, niin todennäköisyys, että jokin niistä tapahtuu, on todennäköisyyksien summa.

$$\text{P}(A_1 \text{ tai } A_2 \text{ tai ... tai } A_n) = \text{P}(A_1) + \text{P}(A_2) + ... + \text{P}(A_n)$$

ESIMERKKI 2 Millä todennäköisyydellä aviopuolisot kuuluvat samaan pääveriryhmään? Tarvittavat tiedot ovat edellisessä esimerkissä 1.

RATKAISU Tapahtuma ”molemmat puolisot kuuluvat samaan pääveriryhmään” voidaan jakaa neljään toisensa poissulkevaan vaihtoehtoon:

molemmat A tai molemmat B tai molemmat AB tai molemmat O.

Siis

P(kuuluvat samaan veriryhmään)

$= \text{P(molemmat A)} + \text{P(molemmat B)} + \text{P(molemmat AB)} + \text{P(molemmat O)}$

$= 0{,}44 \cdot 0{,}44 + 0{,}17 \cdot 0{,}17 + 0{,}08 \cdot 0{,}08 + 0{,}31 \cdot 0{,}31 \approx 0{,}33.$

VASTAUS 0,33

ESIMERKKI 3 Noppaa heitetään kolmesti. Millä todennäköisyydellä heittosarjassa on yksi kuutonen?

RATKAISU Heittosarjan ainoa kuutonen voi tulla ensimmäisellä, toisella tai kolmannella heitolla. Vaihtoehdot ovat toisensa poissulkevat.

Todennäköisyys saada yksittäisellä heitolla kuutonen on $\frac{1}{6}$ ja todennäköisyys saada muu kuin kuutonen on $\frac{5}{6}$.

$$\text{P(yksi kuutonen)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$$ Ensimmäisellä heitolla kuutonen.

$$+ \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$$ Toisella heitolla kuutonen.

$$+ \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$ Kolmannella heitolla kuutonen.

$$= 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$$ Yhteenlaskettavat ovat yhtä suuret.

$$\approx 0{,}35$$

VASTAUS 0,35

Vastatapahtuma

Tapahtuman A vastatapahtuma on tapahtuma ”A ei tapahdu”. Tapahtuman A vastatapahtumaa merkitään $\overline{A}$.

Jos tapahtuman A todennäköisyys tunnetaan, niin vastatapahtuman $\overline{A}$ todennäköisyys saadaan vähentämällä A:n todennäköisyys luvusta 1.

$$\text{P}(\overline{A}) = 1 - \text{P}(A)$$

Jos vastaavasti vastatapahtuman $\overline{A}$ todennäköisyys tunnetaan, niin A:n todennäköisyys on

$$\text{P}(A) = 1 - \text{P}(\overline{A}).$$

ESIMERKKI 4 Millä todennäköisyydellä puolisot kuuluvat eri veriryhmiin?

RATKAISU Tapahtuman ”kuuluvat eri veriryhmiin” vastatapahtuma on ”kuuluvat samaan veriryhmään”.

Esimerkin 2 mukaan P(kuuluvat samaan ryhmään) ≈ 0,33. Siis

P(kuuluvat eri ryhmiin)

= 1 – P(kuuluvat samaan ryhmään) $\quad P(A) = 1 - P(\overline{A})$

≈ 1 – 0,33 = 0,67.

VASTAUS 0,67*

ESIMERKKI 5 Erään tutkimuksen mukaan 9 % ihmisistä on vasenkätisiä.
a) Millä todennäköisyydellä 12 opiskelijan ryhmässä on ainakin yksi vasenkätinen?
b) Kuinka suuri opiskelijaryhmän tulee olla, jotta todennäköisyys, että ryhmässä on ainakin yksi vasenkätinen, olisi suurempi kuin 0,99?

RATKAISU a) Tapahtuman ”ainakin yksi on vasenkätinen” vastatapahtuma on ”kukaan ei ole vasenkätinen”.

* Kysytty todennäköisyys voitaisiin laskea myös suoraan purkamalla tapahtuma ”kuuluvat eri ryhmiin” toisensa poissulkeviin vaihtoehtoihin ”mies A ja vaimo B” tai ”mies A ja vaimo AB” jne. Vaihtoehtoja on monta, ja nyt päästään helpommalla, kun lasketaan ensin vastatapahtuman todennäköisyys.

Todennäköisyys, että yksittäinen opiskelija ei ole vasenkätinen, on $1 - 0{,}09 = 0{,}91$.

Todennäköisyys, että 12 opiskelijan ryhmässä kukaan ei ole vasenkätinen, on $0{,}91^{12}$.

Siis

$$\text{P(ainakin yksi on vasenkätinen)} = 1 - \text{P(kukaan ei ole vasenkätinen)}$$
$$= 1 - 0{,}91^{12} \approx 0{,}68.$$

b) Jos ryhmässä on n opiskelijaa, niin

$$\text{P(ainakin yksi on vasenkätinen)} = 1 - \text{P(kukaan ei ole vasenkätinen)}$$
$$= 1 - 0{,}91^{n}.$$

Tapahtuman ”ainakin yksi on vasenkätinen” todennäköisyys on suurempi kuin 0,99, kun vastatapahtuman ”kukaan ei ole vasenkätinen” todennäköisyys $0{,}91^{n}$ on pienempi kuin 0,01.

Ratkaistaan eksponenttiyhtälö.

$0{,}91^{n} = 0{,}01$ Yhtälön $k^{x} = a$ ratkaisu on $x = \dfrac{\lg a}{\lg k}$.

$$n = \frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}91} \approx 48{,}8$$

Koska potenssien $0{,}91^{n}$ arvot pienenevät n:n kasvaessa, ryhmässä on oltava vähintään 49 opiskelijaa.*

VASTAUS

a) 0,68
b) vähintään 49 opiskelijaa

---

* Toinen tapa ratkaista pienin lukumäärä n on laskea potenssin $0{,}91^{n}$ arvoja, kunnes arvo 0,01 alittuu. Suoritukseen on tällöin kirjattava jokainen laskettu arvo.

Harjoituksia

329. Suomalaisista 44 % kuuluu veriryhmään A. Millä todennäköisyydellä aviopuolisoista
a) mies kuuluu veriryhmään A ja vaimo ei kuulu
b) toinen kuuluu veriryhmään A ja toinen ei kuulu
c) kumpikaan ei kuulu veriryhmään A
d) ainakin toinen kuuluu veriryhmään A?

330. Suomessa syntyvistä lapsista on 51,3 % poikia. Kuinka suurella todennäköisyydellä seitsenlapsisen Jukolan perheen kaikki lapset ovat poikia? (Ylioppilaskoe, k. 1993)

331. Suomessa syntyvistä lapsista 51 % on poikia. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitun kolmilapsisen perheen kaikki lapset ovat samaa sukupuolta?

332. 1960-luvun lopulla yleisin tytöille annettu ensimmäinen etunimi oli Sari, jonka sai nimekseen 4 % tytöistä. Vanhempainkokouksessa on 18 kyseiseen ikäluokkaan kuuluvaa naista. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi heistä on Sari?

333. Arpajaisissa, joissa on paljon arpoja, 35 % arvoista voittaa. Millä todennäköisyydellä Sari saa yhden voiton, kun hän ostaa
a) kaksi b) kolme arpaa?

Valintojen laskeminen

Tuloperiaate

Jos kokonaisuus valitaan vaiheittain, niin valintamahdollisuuksien lukumäärä on vaiheittaisten valintojen lukumäärien tulo. Tämä on niin sanottu *tuloperiaate*.

ESIMERKKI 1 Monivalintakokeessa on viisi tehtävää, joista jokaisessa valitaan yksi neljästä vaihtoehdosta. Kuinka monella tavalla opiskelija voi koerivinsä täyttää?

RATKAISU Täytetään rivi tehtävä kerrallaan.

1. tehtävä	4 vaihtoehtoa
2. tehtävä	4 vaihtoehtoa
3. tehtävä	4 vaihtoehtoa
4. tehtävä	4 vaihtoehtoa
5. tehtävä	4 vaihtoehtoa

Tuloperiaatteen nojalla erilaisten vastausrivien lukumäärä on

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1\,024$.

VASTAUS 1 024 tavalla

Kertoma

Tuloperiaatteesta seuraa, että n-alkioinen joukko voidaan järjestää jonoon

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

eri tavalla. Luku $n!$ on luvun n *kertoma*.

Luvun kertoma voidaan laskea laskimen näppäimellä [!].

ESIMERKKI 2 Kuinka moneen eri järjestykseen tietosanakirjan 12 osaa voidaan sijoittaa kirjahyllyyn?

RATKAISU 12 kirjaa voidaan sijoittaa $12! = 479\,001\,600$ eri järjestykseen.

VASTAUS 479 001 600 järjestykseen

Osajoukkojen lukumäärä

n alkion joukon k-alkioisten osajoukkojen lukumäärä on

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}^{k \text{ kappaletta}}}{k!}.$$

Osoittajassa on laskettu n:stä alkaen alaspäin k:n peräkkäisen kokonaisluvun tulo.

Esimerkiksi $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35.$

Lukuja $\binom{n}{k}$ kutsutaan *binomikertoimiksi*.

Binomikertoimen $\binom{n}{k}$ arvo voidaan laskea laskimella näppäilemällä n nCr k.

Binomikertoimen $\binom{n}{k}$ arvo voidaan laskea myös kertoman avulla muodossa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Luvun n kertoma jaetaan luvun k kertoman ja erotuksen $n-k$ kertoman tulolla.

ESIMERKKI 3 Lottoriviin arvotaan seitsemän lottonumeroa luvuista 1, 2, ... , 39. Mikä on todennäköisyys saada lotossa yhdellä rivillä seitsemän oikein?

RATKAISU Lottorivi on 39 luvun muodostaman joukon 7-alkioinen osajoukko. Erilaisten lottorivien lukumäärä on

$$\binom{39}{7} = 15\,380\,937.$$

Vain yhdessä lottorivissä on seitsemän oikein.

$$\mathrm{P}(7 \text{ oikein}) = \frac{1}{15\,380\,937} \approx 6{,}5 \cdot 10^{-8}$$

VASTAUS $\dfrac{1}{15\,380\,937} \approx 6{,}5 \cdot 10^{-8}$

Harjoituksia

334. Maisalla on viidet housut, kahdeksan t-paitaa, neljä neulepuseroa ja kolmet kengät. Kuinka monella tavalla hän voi pukeutua housuihin, t-paitaan, neulepuseroon ja kenkiin?

335. Avaimessa on seitsemän lovea, joiden jokaisen syvyys voi vaihdella viidellä eri tavalla. Kuinka monta erilaista avainta on?

336. Kuinka monta erilaista juoksujärjestystä on mahdollista valita seitsenhenkiselle suunnistusviestijoukkueelle?

337. 12 opetuslasta valitsee keskuudestaan nelihenkisen johtoryhmän. Kuinka monta erilaista mahdollista kokoonpanoa johtoryhmällä on?

338. Viking-lotossa arvotaan kuusi lottonumeroa luvuista 1–48.
a) Kuinka monta erilaista lottoriviä Viking-lotossa on? Mikä on todennäköisyys saada yhdellä rivillä kuusi oikein?
b) Kuinka monta sellaista lottoriviä on, jossa ei ole yhtään arvotun lottorivin numeroa? Mikä on todennäköisyys saada yhdellä rivillä nolla oikein?

Tilasto-oppia

Moodi

Havaintoarvojen *moodi* eli *tyyppiarvo* on havaintoaineistossa useimmin esiintyvä muuttujan arvo.

Mediaani

Havaintoarvojen *mediaani* on arvo, joka jakaa havaintoarvot järjestyksessä kahteen yhtä suureen osaan.

Jos havaintoarvoja on pariton määrä, mediaani on suuruusjärjestyksessä keskimmäinen havaintoarvo. Jos havaintoarvoja on parillinen määrä, mediaani on kahden keskimmäisen keskiarvo.

Keskiarvo

Havaintoarvojen *keskiarvo* on havaintoarvojen summa jaettuna havaintoarvojen lukumäärällä.*

Kun keskiarvo lasketaan luokitellusta aineistosta, niin jokaista luokkaa edustaa *luokkakeskus*. Luokkakeskus on luokan todellisten rajojen keskiarvo.

Keskiarvoa laskettaessa voidaan käyttää hyväksi laskimen tilastotoimintoja.

---

* Taulukkokirjoissa on keskiarvon kaava muodossa $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

ESIMERKKI 1 Laske äidinkielen kurssilla annettujen kurssiarvosanojen moodi, mediaani ja keskiarvo. Havainnollista jakaumaa sopivalla diagrammilla.

arvosana	frekvenssi
10	2
9	6
8	8
7	9
6	4
5	0
4	2

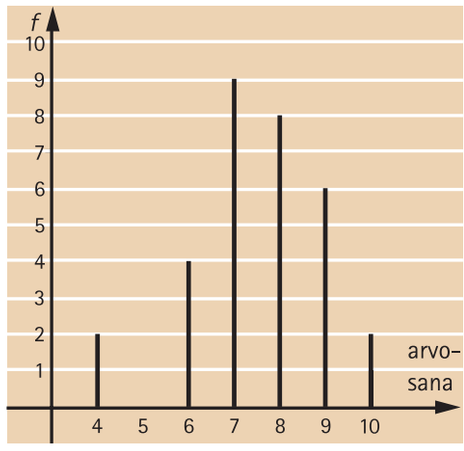
RATKAISU Yleisin arvosana on 7. Arvosanojen moodi on 7.

Kurssiarvosanojen lukumäärä on $2 + 6 + 8 + 9 + 4 + 0 + 2 = 31$. Havaintoarvojen mediaani on järjestyksessä 16. arvosana alhaalta (tai ylhäältä) laskettuna. Arvosanoja, jotka ovat pienempiä kuin 8, on $2 + 4 + 9 = 15$, joten 16. arvosana on 8. Havaintoarvojen mediaani on 8.

Keskiarvo on havaintoarvojen summa jaettuna havaintoarvojen lukumäärällä. Summaa laskettaessa jokainen havaintoarvo kerrotaan frekvenssillään.

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 10 + 6 \cdot 9 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 4}{31} = \frac{233}{31} \approx 7{,}5$$

Sopiva havainnollistus on janadiagrammi.



VASTAUS moodi 7, mediaani 8, keskiarvo 7,5

Keskihajonta

Keskihajonta on havaintoarvojen keskiarvosta laskettujen poikkeamien neliöiden keskiarvon neliöjuuri.*

Keskihajonta voidaan laskea laskimen tilastotoiminnoilla.

ESIMERKKI 2 Laske Karin äidinkielen kurssiarvosanojen 9, 7, 7, 5, 8 ja 9 keskihajonta.

RATKAISU Arvosanojen keskiarvo on

$$\bar{x} = \frac{9 + 7 + 7 + 5 + 8 + 9}{6} = 7{,}5.$$

Keskiarvosta laskettujen poikkeamien $9 - 7{,}5$, $7 - 7{,}5$ jne. neliöiden keskiarvo on

$$\frac{(9 - 7{,}5)^2 + (7 - 7{,}5)^2 + (7 - 7{,}5)^2 + (5 - 7{,}5)^2 + (8 - 7{,}5)^2 + (9 - 7{,}5)^2}{6}$$

$$= \frac{1{,}5^2 + (-0{,}5)^2 + (-0{,}5)^2 + (-2{,}5)^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5^2}{6}$$

$$= \frac{2{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 6{,}25 + 0{,}25 + 2{,}25}{6} = \frac{11{,}5}{6}.$$

Keskihajonta on

$$s = \sqrt{\frac{11{,}5}{6}} \approx 1{,}38.$$

VASTAUS 1,38

---

* Taulukkokirjoissa on keskihajonnan kaava muodossa $s_n = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$.

Harjoituksia

339. Viiden jalkapalloilijan yhteispaino on 425 kg, ja kymmenen balettitanssijan keskimääräinen paino on 52 kg. Mikä on kaikkien viidentoista keskimääräinen paino? (Ylioppilaskoe, k. 1998)

340. Tiina tutki, kuinka monta aikakauslehteä opiskelijoiden kotiin oli tilattu. Määritä aikakauslehtien lukumäärän tyyppiarvo, mediaani ja keskiarvo. Havainnollista jakaumaa sopivalla diagrammilla.

aikakaus-lehtiä	frekvenssi
0	4
1	23
2	14
3	9
4	7
5	3

341. Taulukossa on Suvikummun päiväkotien lasten lukumäärät iän mukaan 1.1.2007.

ikä (vuotta)	lapsia
0–1	48
2–4	145
5–6	109

a) Laske lasten keski-ikä.
b) Määritä suhteellinen ikäjakauma ja havainnollista jakaumaa histogrammilla.

342. Laske lämpötilahavaintojen 0 °C, 6 °C, −1 °C, 7 °C ja −2 °C keskihajonta.

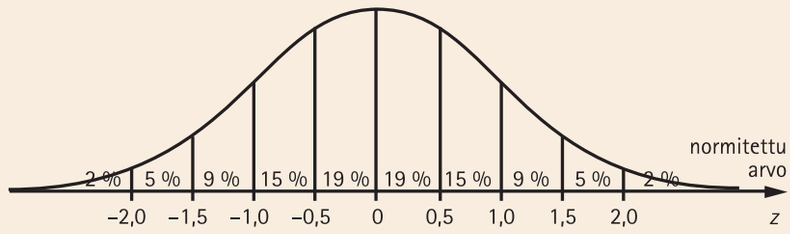
343. Laske laskimen tilastotoiminnoilla tehtävän 340 jakauman keskihajonta.

Normaalijakauma

Normaalijakauma

Monien muuttujien kokeellisesti havaittu jakauma noudattaa *normaalijakaumaa*.

Normaalijakauma on symmetrinen: jakauma on samanlainen keskiarvon molemmin puolin.



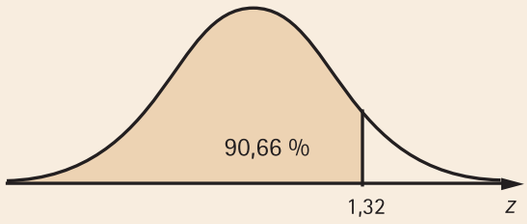
Kuviossa on *normitettu normaalijakauma*, jonka keskiarvo on 0. Kuvion prosenttiosuudet pätevät mille tahansa normaalijakaumaa noudattavalle muuttujalle, kun ensin suoritetaan *normitus*:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}.$$

Havaintoarvon x poikkeama keskiarvosta $\bar{x}$ jaettuna keskihajonnalla.

Normitettu arvo ilmaisee, kuinka monen keskihajonnan s verran ja mihin suuntaan havaintoarvo x poikkeaa keskiarvosta $\bar{x}$.

Tavallisesti normitetun normaalijakauman prosenttiosuudet katsotaan taulukosta. Taulukosta voidaan lukea positiivisille z:n arvoille, kuinka monta prosenttia jakaumasta on normitetun arvon z alapuolella. Taulukon mukaan esimerkiksi arvon $1{,}32$ alapuolella on $90{,}66\ \%$ jakaumasta.



	0	1	2	3
...				
1,0	8413	8438	8461	8485
1,1	8643	8665	8686	8708
1,2	8849	8869	8888	8907
1,3	9032	9049	**9066**	9082
1,4	9192	9207	9222	9236
...				

Taulukkoa voidaan käyttää myös negatiivisilla z:n arvoilla hyödyntämällä normaalijakauman symmetriaa.

Normitetun normaalijakauman taulukko on taulukkokirjoissa ja tässä kirjassa sivulla 291.

ESIMERKKI 1

Seitsemänvuotiaiden suomalaisten poikien pituus noudattaa likimain normaalijakaumaa keskiarvona $122{,}7$ cm ja keskihajontana $5{,}0$ cm. Kuinka monella prosentilla pojista pituus on a) yli $130{,}0$ cm b) alle $120{,}0$ cm c) välillä $120{,}0$ cm–$130{,}0$ cm?

RATKAISU

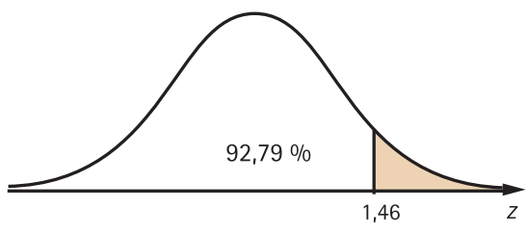
a) Lasketaan pituutta $130{,}0$ cm vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{130{,}0 - 122{,}7}{5{,}0}$$

Arvon $130{,}0$ cm poikkeama keskiarvosta jaettuna keskihajonnalla.

$$= 1{,}46$$

Taulukon mukaan normitetun arvon $1{,}46$ alapuolella on $92{,}79\ \%$ jakaumasta ja siis yläpuolella $100\ \% - 92{,}79\ \% = 7{,}21\ \%$ jakaumasta. Pituus on yli $130{,}0$ cm $7{,}2\ \%$:lla pojista.



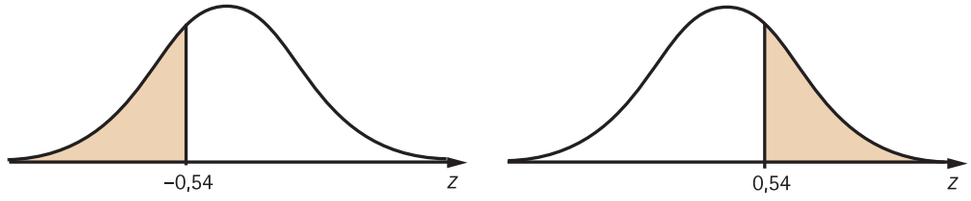
b) Pituutta 120,0 cm vastaava normitettu arvo on

$$z = \frac{120{,}0 - 122{,}7}{5{,}0}$$

Arvon 120,0 cm poikkeama keskiarvosta jaettuna keskihajonnalla.

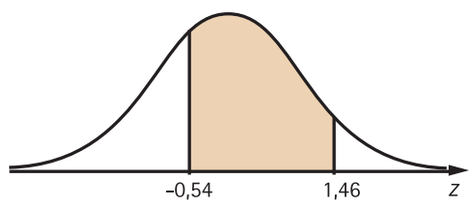
$$= -0{,}54.$$

Symmetrian nojalla normitetun arvon $-0{,}54$ alapuolella on sama osuus jakaumasta kuin arvon 0,54 yläpuolella.



Taulukon mukaan arvon 0,54 alapuolella on 70,54 % jakaumasta. Normitetun arvon $-0{,}54$ alapuolella on 100 % – 70,54 % = 29,46 % jakaumasta. Pituus on alle 120,0 cm 29 %:lla pojista.

c) a-kohdan mukaan pituutta 130,0 cm vastaavan normitetun arvon 1,46 alapuolella on 92,79 % jakaumasta.
b-kohdan mukaan pituutta 120,0 cm vastaavan normitetun arvon $-0{,}54$ alapuolella on 29,46 % jakaumasta.
Normitettujen arvojen $-0{,}54$ ja 1,46 välissä on
92,79 % – 29,46 % = 63,33 %
jakaumasta. Pituus on välillä
120,0 cm–130,0 cm 63 %:lla
pojista.



VASTAUS a) 7,2 % b) 29 % c) 63 %

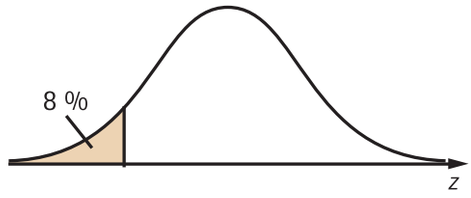
ESIMERKKI 2 Soveltuvuustestin tulosten keskiarvo on 74,6 pistettä ja keskihajonta 14,8 pistettä. Tulokset noudattavat normaalijakaumaa. Heikoin 8 % suorituksista arvostellaan hylätyiksi ja keskimmäiset 60 % tyydyttäviksi. Määritä

a) hylkäysraja

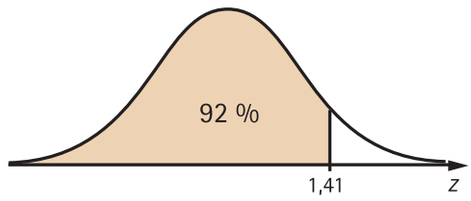
b) tyydyttävän suorituksen rajat.

RATKAISU

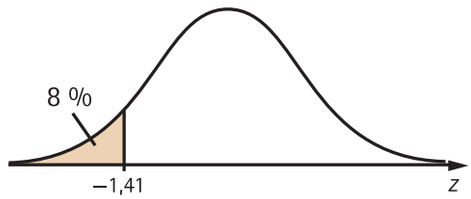
a) On määritettävä normitettu arvo, jonka alapuolelle jää 8 % havainnoista.



Käytetään hyväksi symmetriaa ja määritetään taulukosta normitettu arvo, jonka alapuolelle jää $100\ \% - 8\ \% = 92\ \%$ havainnoista. Lähinnä on arvo $z \approx 1{,}41$.



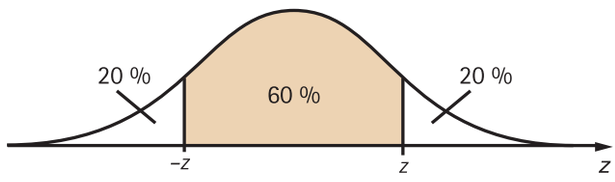
Symmetrian nojalla kohdan $-1{,}41$ alapuolelle jää 8 % havainnoista.



Hylkäysrajan on oltava 1,41 keskihajontaa keskiarvon alapuolella. Rajaksi asetetaan

$74{,}6 - 1{,}41 \cdot 14{,}8 \approx 54.$

b) Määritetään normitetun normaalijakauman keskiarvon 0 suhteen symmetrinen väli, jolla on 60 % jakaumasta.



Symmetrian vuoksi sekä kohdan $-z$ alapuolelle että kohdan z yläpuolelle jää $\dfrac{100\ \% - 60\ \%}{2} = 20\ \%$ jakaumasta.

On siis määritettävä z:n arvo, jonka alapuolelle jää $60\ \% + 20\ \% = 80\ \%$ jakaumasta. Taulukon mukaan lähinnä on arvo $z \approx 0{,}84$.

Tyydyttävän arvosanan yläraja tulee asettaa $0{,}84$ keskihajonnan verran keskiarvon yläpuolelle ja alaraja $0{,}84$ keskihajonnan verran keskiarvon alapuolelle.

Yläraja on

$74{,}6 + 0{,}84 \cdot 14{,}8 \approx 87$.

Alaraja on

$74{,}6 - 0{,}84 \cdot 14{,}8 \approx 62$.

VASTAUS a) 54 pistettä b) alaraja 62 pistettä ja yläraja 87 pistettä

Harjoituksia

344. Suomalaisten poikalasten syntymäpituus noudattaa normaalijakaumaa keskiarvona 52,0 cm ja keskihajontana 3,5 cm. Kuinka monella prosentilla poikavauvoista pituus on a) alle 56,0 cm b) yli 50,0 cm c) alle 46,0 cm?

345. Tieosuudella, jolla oli 90 km/h nopeusrajoitus, mitattujen nopeuksien keskiarvo oli 85,2 km/h ja keskihajonta 8,0 km/h. Kuinka monta prosenttia autoista ajoi a) ylinopeutta b) vähintään 100 km/h, kun nopeuksien jakauma oli normaali? (Ylioppilaskoe, k. 1989)

346. Soveltuvuustestin tulokset noudattavat normaalijakaumaa, jonka keskiarvo on 82,7 pistettä ja keskihajonta 12,1 pistettä. Mikä tulee asettaa hyväksymisrajaksi, jos halutaan, että testissä hylätään a) 75 % b) 15 % osallistujista?

347. Oppilas on saanut matematiikan kurssiista arvosanat 9, 8, 6, 4, 5 ja 9. Määritä arvosanojen keskiarvo ja mediaani. Oppilas osallistuu vielä yhteen syventävään kurssiin. Millaisiksi em. tunnusluvut tällöin enintään voivat parantua? (Ylioppilaskoe, k. 1999)

348. Eräässä matematiikan kokeessa arvosanojen jakauma oli seuraava:

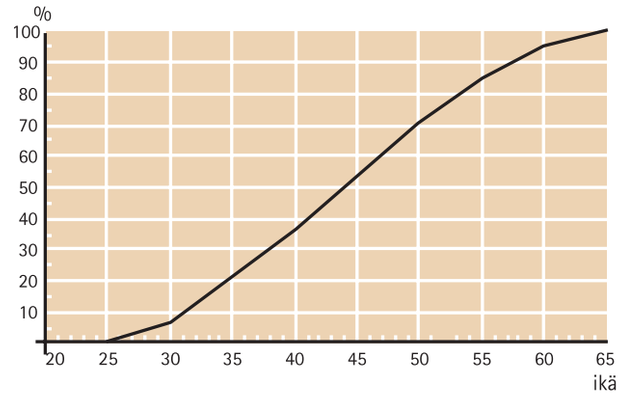
4	5	6	7	8	9	10
1,3 %	9,8 %	15,8 %	20,3 %	23,3 %	23,4 %	6,1 %

Laske arvosanojen keskiarvo.
(Ylioppilaskoe, s. 2001)

349. a) Kahta virheetöntä noppaa heitetään kerran. Mikä on todennäköisyys, että pistesumma on suurempi kuin kahdeksan?
b) Kahta virheetöntä noppaa heitetään kahdesti. Mikä on todennäköisyys, että kummallakin kerralla pistesumma on suurempi kuin kahdeksan? (Ylioppilaskoe, k. 2004)

350. Kivi heitetään umpimähkään ympyrään. Millä todennäköisyydellä se osuu lähemmäksi ympyrän keskipistettä kuin sen kehää? (Ylioppilaskoe, k. 1998)

351. Kuvion summafrekvenssikuvaaja esittää ammatissa toimivien lääkärien ikäjakaumaa vuonna 2001. (Lähde: Terveydenhuollon ammattihenkilöt 31.12.2001, Stakes 5/2002.)
Arvioi kuvaajan perusteella
a) lääkäreiden mediaani-ikä,
b) ikä, jonka 25 % lääkärikunnasta alitti,
c) ikä, jonka 25 % lääkärikunnasta ylitti,
d) kuinka monta prosenttia lääkärikunnasta oli 40 vuotta täyttäneitä,
e) kuinka monta prosenttia enemmän oli alle 35-vuotiaita lääkäreitä kuin 55 vuotta täyttäneitä. (Ylioppilaskoe, s. 2004)



352. Suomalaisten 30-vuotiaiden miesten keskipituus on 180,0 cm, ja pituuksien keskihajonta on 5,8 cm. Kuinka monta prosenttia 30-vuotiaista miehistä on yli kaksi metriä pitkiä, jos oletetaan, että pituus noudattaa normaalijakaumaa? (Ylioppilaskoe, k. 2004)

353. Pekka tietää kokemuksesta, että hän osuu tikanheitossa kymppiin 8 prosentin todennäköisyydellä. Pekka heittää viisi tikkaa. Millä todennäköisyydellä hän osuu kymppiin
a) ensimmäisellä, muttei muilla tikoilla,
b) ainakin yhdellä tikalla, c) täsmälleen yhdellä tikalla? (Ylioppilaskoe, k. 2000)

354. Puu, jonka korkeus on 12,0 metriä, on talon 16,0 metrin pituisen seinän keskikohdan kohdalla 7,0 metrin etäisyydellä seinästä. Jos myrskytuuli katkaisee puun tyvestä ja puu kaatuu satunnaiseen suuntaan, niin millä todennäköisyydellä puu osuu taloon?

355. Kokelaan ylioppilastutkinnon matematiikan koe muodostuu 10 tehtävästä. Vanhanmuotoisessa matematiikan kokeessa oli 10 tehtävää ja osassa tehtävistä oli kaksi vaihtoehtoa, joista sai laskea vain toisen; nykyisessä kokeessa saa 15 tehtävästä vapaasti valita suoritettavakseen 10 tehtävää. Kuinka monta erilaista 10 tehtävän kokonaisuutta on
a) vanhanmuotoisessa kokeessa, jossa viidessä tehtävässä on kaksi vaihtoehtoa, ja
b) nykyisessä uudenmuotoisessa kokeessa?
(Ylioppilaskoe, s. 2000)

356. Artikkelin oikovedoksen lukee kolme henkilöä, jotka toisistaan riippumatta löytävät yksittäisen painovirheen todennäköisyyksillä 0,9, 0,8 ja 0,7. Millä todennäköisyydellä oikovedoksen kaikki kymmenen painovirhettä tulevat löydetyiksi?

357. Eräässä lyhyen matematiikan ylioppilaskokeessa keskiarvo oli 27,36 ja keskihajonta 12,23 pistettä. Jos oletetaan pistemäärän noudattavan normaalijakaumaa, niin
a) mikä on alin pistemäärä, jolla saa laudaturin, jos laudatur-arvosanojen osuudeksi halutaan enintään 5 % kaikista kokelaista,
b) kuinka monta prosenttia kokelaista hyväksytään, jos alin hyväksytty pistemäärä on 12? (Ylioppilaskoe, s. 2005)

358. Pussituskonetta säätämällä pussin keskisisältö voidaan valita väliltä 300 g–500 g. Mittausten mukaan sisällön massa on normaalisti jakautunut hajonnan ollessa 15 g. Miten suureksi pussin keskisisältö on säädettävä, kun vaaditaan, että pussin sisältö on 95 prosentin todennäköisyydellä yli 400 g?
(Ylioppilaskoe, k. 1991)

359. Opetusryhmän kaikki 31 oppilaasta ovat syntyneet vuonna 1992. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi heistä on syntynyt helmikuun 29. päivänä? Kuinka suuri ryhmän tulisi olla, jotta todennäköisyys olisi suurempi kuin 0,90?

360. Sienikurssilla opetettiin tunnistamaan 78 erilaista sientä, joista kurssilainen oppi kuitenkin vain 49. Kuinka suurella todennäköisyydellä hän tunnisti oikein hänelle satunnaisesti esitetyt kuusi erilaista kurssilla opetettua sientä? (Ylioppilaskoe, s. 1996)

361. Oletetaan, että paperin pinta-alamassa (g/m^2) on normaalijakautunut. Asiakas tilaa paperia, jonka pinta-alamassa on keskimäärin 80 g/m^2. Kuinka suuri hajonta saa pintapainossa enintään olla, jotta todennäköisyys saada alle 75 g/m^2 painavaa paperia olisi pienempi kuin 5 %?
(Ylioppilaskoe, s. 1996)

362. Ikäluokkaan 20–24 kuuluvista suomalaisista miehistä 5,2 % ja naisista 11,9 % on naimisissa. Koolla on kyseiseen ikäluokkaan kuuluvien joukosta arvottu ryhmä, jossa on kahdeksan miestä ja viisi naista. Millä todennäköisyydellä ryhmän jäsenistä
a) vähintään yksi on naimisissa
b) vähintään yksi mies ja vähintään yksi nainen on naimisissa?

363. Lammilla eräänä kesäpäivänä suoritetussa automaattisessa liikennemittauksessa autoilijoista 89,25 % ajoi vähintään 80 kilometrin tuntinopeutta ja 12,29 % vähintään 100 km/h. Nopeuden arvot ovat jakautuneet normaalisti. Määritä nopeuksien keskiarvo ja keskihajonta.

364. Erään 16 500 ihmistä käsittävän ryhmän pituuden oletetaan noudattavan normaalijakaumaa N(p; s), jossa $p = 175$ cm ja $s = 5$ cm. Ryhmän älykkyysosamäärän oletetaan samoin jakautuvan normaalisti N(102; 12). Mikä on todennäköisyys, että ryhmästä löytyy ainakin yksi henkilö, jonka pituus on yli 190 cm ja älykkyysosamäärä yli 140? Ryhmän kengännumerot ovat nekin jakautuneet normaalisti N(41,6; 0,6). Voidaanko samalla päättelyllä kuin yllä laskea todennäköisyys, että ryhmässä on ainakin yksi henkilö, jonka pituus on yli 190 cm ja kengännumero vähintään 45? Perustele.
(Ylioppilaskoe, s. 1997)

Tehtäväsarjoja

Sarja E

1. Ratkaise a) yhtälö $x(x + 1) = 156$,
b) yhtälöpari

$$2x + 3y = -8$$
$$2x - y = 4.$$

(Ylioppilaskoe, k. 2004)

2. a) Ohuen, jäykän levyn pituus on 250 cm ja leveys 210 cm. Voidaanko levy viedä oviaukosta, jonka leveys on 80 cm ja korkeus 200 cm? (Ylioppilaskoe, k. 1997)
b) Tuula ajoi polkupyörällä pitkin tietä, jonka varrella oli puhelinpylväitä 50 metrin välein. Tuula huomasi ajavansa 14 sekunnissa puhelinpylväältä toiselle. Millä nopeudella (km/h) Tuula ajoi? (Ylioppilaskoe, k. 1996)

3. Tavaran veroton hinta rautakaupassa muodostuu kaupan maksamasta tukkuhinnasta ja kaupan katteesta. Myyntihinta saadaan lisäämällä verottomaan hintaan 22 %:n arvonlisävero. Rautakauppa myy 33,80 eurolla hankkimansa tavaran 98,90 eurolla. Kuinka suuri kaupan kate tällöin on? Kuinka monta prosenttia kate pienenee, kun kauppa myy tavaran 30 %:n alennuksella?

4. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 1 000 metriä ja toinen terävä kulma 50°. Ilmoita metrin tarkkuudella, kuinka kaukana suoran kulman kärki on hypotenuusasta. (Ylioppilaskoe, k. 1978)

5. Erään oppilaitoksen kustannustaso ylittää normitason 21 prosentilla. Kuinka monta prosenttia kustannuksista on leikattava vuosittain, jotta oppilaitoksen kustannukset saavuttaisivat normin kolmessa vuodessa?
(Ylioppilaskoe, s. 1993)

6. Määritä se paraabelin $y = x^2 + 2x - 1$ piste (x, y), jossa koordinaattien summa on mahdollisimman pieni.
(Ylioppilaskoe, k. 2005)

7. Yhdestä grammasta kultaa voidaan vetää 2,5 km kultalankaa. Mikä on tällöin poikkileikkaukseltaan ympyränmuotoisen langan halkaisija? Mikä on kultalangan pituus, jos halkaisija on 0,10 mm? Kullan tiheys on 19,3 kg/dm^3. (Ylioppilaskoe, k. 1999)

8. Nykykulutuksella maapallon tunnetut maakaasuvarat riittävät 70 vuodeksi. Kuinka monessa vuodessa maakaasu loppuu, jos kulutus kasvaa joka vuosi 2,0 prosenttia?

9. Babylonialaiset esittivät noin 4000 vuotta sitten luvulle π likiarvon $3\frac{1}{8}$. Samoihin aikoihin egyptiläiset esittivät, että sellaisen ympyrän ala, jonka halkaisija on 9, on sama kuin sellaisen neliön ala, jonka sivu on 8. Näytä, että ensin mainittu arvio on hieman liian pieni, kun taas toinen arvio antaa π:lle tulokseksi hieman liian suuren arvon. Kuinka monta prosenttia näiden arvioiden keskiarvo poikkeaa π:n oikeasta arvosta?
(Ylioppilaskoe, s. 2003)

10. Lukion A opiskelija Alina sai lukioiden yhteisessä vieraan kielen ainekirjoituskokeessa 82 pistettä ja lukion B opiskelija Bertta 80 pistettä. Kummassakin lukiossa kokeen keskiarvo oli 72 pistettä. Hajonta lukiossa A oli 9,2 pistettä ja lukiossa B 6,8 pistettä. Oletetaan, että pistemäärät noudattavat normaalijakaumaa. Tutki, kumpi opiskelija menestyi paremmin oman lukionsa tasoon verrattuna. Kuinka suuri osuus lukion B opiskelijoista menestyi kokeessa keskiarvoa paremmin mutta huonommin kuin Bertta? Entä Alinaa paremmin lukiossa A?
(Ylioppilaskoe, s. 2001)

Sarja F

1. a) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2x}{3}$.

b) Laske lausekkeen $\frac{x(xy)^3}{y}$ tarkka arvo, kun $x = \sqrt{5}$ ja $y = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

2. a) Määritä funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 21x + 1$ derivaattafunktion nollakohdat.
b) Määritä suorien $3x - y + 4 = 0$ ja $y = 6$ leikkauspiste.

3. Lääkehoito aloitetaan antamalla potilaalle ensimmäisellä viikolla joka päivä 20 mg lääkettä, minkä jälkeen päiväannosta kasvatetaan joka viikko yhtä suurella määrällä niin, että viimeisellä, 25. viikolla päiväannos on 80 mg. Paljonko lääkettä hoitoon tarvitaan?

4. Kun heiluri heilahtaa pystyasennosta ääriasentoon, heilurin alapää kohoaa 7,2 cm ja etääntyy pystysuorasta linjasta 23,4 cm. Kuinka pitkä heiluri on?

5. Itä-länsisuuntaisen kadun leveys on 15 metriä. Kadun eteläpuolella on 18 metriä korkea talo. Aurinko on etelässä 41°:n korkeudella. Osuvatko auringonsäteet kadun pohjoispuolella olevan talon ikkunaan, jonka yläreuna on 4,0 metrin korkeudella kadun pinnasta?

6. Tuoteselosteen mukaan juustossa on rasvaa 28 % painosta ja 45 % kuiva-aineesta. Kuinka monta prosenttia juuston painosta on vettä?

7. Tietokonepelissä heitetään virheellistä noppaa, jossa nopan silmälukujen todennäköisyydet ovat suoraan verrannollisia silmälukuihin. Mitkä ovat eri silmälukujen todennäköisyydet? Mikä on todennäköisyys saada kahdella heitolla kaksi kuutosta?
(Ylioppilaskoe, s. 2001)

8. Kahden kadun kulmaukseen rajattavan suorakulmion muotoisen tontin ympärysmitaksi on määrätty 150 m. Rakennuskielto-alue ulottuu 10 metrin päähän pääkadusta ja 5 metrin päähän sivukadusta. Määritä tontin mitat niin, että jäljelle jäävä rakentamiskelpoinen alue on mahdollisimman suuri.

9. Määrittämällä Äänisen rannoilla tehtyjen hautalöytöjen luiden ikä radioaktiivisen hiili-isotoopin C-14 pitoisuuden avulla on selvitetty, että alueella on ollut asutusta jo 7 500 vuotta sitten. a) Kuinka monta prosenttia luiden radioaktiivisen hiilen määrä on vähentynyt tänä aikana, kun eliön kuoltua hiilen määrä puoliintuu 5 730 vuodessa?
b) Kuinka monta vuotta tarvitaan lisää, jotta radioaktiivisen hiilen määrä on alentunut 30 prosenttiin alkuperäisestä arvosta?
(Ylioppilaskoe, k. 2004)

10. Henkilö otti vuoden 2003 alussa 40 000 euron asuntolainan 10 vuodeksi. Hän maksaa lainan ja korot yhtä suurena vuotuisena eränä aina vuoden lopussa, ts. kyseessä on tasaerälaina. Mikä on erän suuruus, jos korko on neljä prosenttia? Lainasopimuksen mukaan koron noustessa erän suuruus ei muutu (mahdollisesti pienemmäksi jäävää viimeistä erää lukuun ottamatta), vaan laina-aikaa pidennetään nousua vastaavasti. Minkä vuoden lopussa henkilö maksaa viimeisen erän, jos korko nousee viiden vuoden kuluttua kuuteen prosenttiin eikä tämän jälkeen muutu? Mikä on viimeisen erän suuruus?
(Ylioppilaskoe, k. 2004)

Sarja G

1. a) Ratkaise x yhtälöstä $\dfrac{ax+b}{cx+d}=3$, kun $a=1,\ b=2,\ c=4,\ d=5$.

b) Ratkaise yhtälö
$(3x-1)(2x+1)=(6x+3)(3x-1)$.

2. a) Kuinka moninkertaiseksi lausekkeen x^2y^3 arvo tulee, jos muuttujan x arvo nelinkertaistuu ja muuttujan y arvo viisinkertaistuu?
b) Tuotteen hintaa korotettiin ensin 15 %, mutta laskettiin sitten 10 %, jolloin hinnaksi tuli 738,99 euroa. Mikä tuotteen alkuperäinen hinta oli?

3. Nosturi voi liikkua suoria kiskoja pitkin 35 metriä ja kurottautua 18 metrin päähän. Kuinka suuri nosturin saavuttama alue on?

4. Erään tuotteen A valmistukseen käytetään viittätoista eri alihankkijoiden valmistamaa osaa. Kunkin osan toimituksessa sattuu yhtenä työpäivänä sadasta A:n tuotannon keskeyttäviä häiriöitä. Mikä on todennäköisyys, että tuotanto annettuna työpäivänä keskeytyy mainitusta syystä?
(Ylioppilaskoe, s. 1989)

5. Raakatimantin arvo on suoraan verrannollinen timantin painon neliöön. Timantti, jonka paino oli 12,9 grammaa, särkyi kahteen osaan, jotka painoivat 5,2 grammaa ja 7,7 grammaa. Kuinka monta prosenttia timantin arvo aleni?

6. Kartalla, jonka yksikkönä on kilometri, erästä päätietä esittää suora $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.
Missä pisteessä päätie risteää pisteiden $(4, 1)$ ja $(-2, 4)$ kautta kulkevan suoran tien kanssa? Kuinka kaukana risteys on pisteessä $(4, 1)$ oleva talosta?

7. Litra veden ja etyylialkoholin seosta painoi 912 g. Mikä oli seoksen alkoholipitoisuus a) tilavuusprosentteina b) painoprosentteina? Etyylialkoholin tiheys on 0,79 kg/dm^3 ja veden 1,00 kg/dm^3.

8. Karachin väkiluku vuonna 1972 oli 3,43 miljoonaa ja vuonna 1981 5,21 miljoonaa. Tuolloin laadittiin ennuste kaupungin väkiluvulle vuonna 2006 olettaen, että väkiluvun vuotuinen suhteellinen kasvu pysyy samana. Vuosituhannen lopulla kaupungin väkiluvun kasvu alkoi kuitenkin hidastua niin, että väkiluku vuonna 2006 oli 16 % ennustettua pienempi. Mikä Karachin väkiluku vuonna 2006 oli?

9. Rännin alla olevan ympyrälieriön muotoisen sadevesiastian pohjan halkaisija on 52 cm ja korkeus 76 cm. Tiedetään, että 1 mm:n sade tuo astiaan 28 litraa vettä. Paikkakunnalla on kuukauden sademäärien keskiarvo 42 mm ja keskihajonta 39 mm. Millä todennäköisyydellä astia täyttyy kuukauden aikana, kun haihtumista ei oteta huomioon? Oletetaan, että sademäärä noudattaa normaalijakaumaa. (Ylioppilaskoe, k. 1999)

10. Suoraa ympyrälieriötä varten tehdään metrin pituisesta rautalangasta kehikko, joka muodostuu kahdesta samankokoisesta vaakaympyrästä ja niitä yhdistävästä pystysauvasta. Missä rajoissa ympyröiden säde voi vaihdella, jotta syntyisi haluttu kehikko, ja millä säteen arvolla lieriön tilavuus tulisi mahdollisimman suureksi?
(Ylioppilaskoe, s. 1996)

Vastaukset

Lukuja ja laskutoimituksia

1. a) $\frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$ b) $\frac{4}{21}$

c) $\frac{1}{6}$ $(\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2})$

2. a) $-\frac{25}{28}$ b) $-\frac{1}{12}$ $(\frac{1}{2} : (-6))$

3. a) $\frac{14}{9}$ $(-\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{9} + \frac{5}{3})$

b) $-\frac{20}{9}$ $(\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot (-\frac{2}{3}) = \frac{4}{9} - \frac{8}{3})$

4. a) $\frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$ b) $\frac{97}{36} = 2\frac{25}{36}$ $(\frac{4}{9} + \frac{9}{4})$

5. $\frac{5}{8}$ (Jos leivoksen alkuperäinen koko on a, niin Matin jälkeen jäljellä on $\frac{5}{6}a$ ja Tiinan jälkeen $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}a$.)

6. 2,82 €/kg (Salaatin hinta $0{,}417 \cdot 3{,}43\ € + 0{,}384 \cdot 2{,}15\ €$ jaetaan painolla $0{,}417\ \text{kg} + 0{,}384\ \text{kg}$.)

7. kaupassa (Kilogrammahinta torilla oli 2,42 euroa ja kaupassa 2,15 euroa.)

8. 25 000 ($1\ \text{ha} = 10\,000\ \text{m}^2$)

9. 11 vuorokaudeksi
($1\ \text{ml} = 0{,}001\ \text{l}$; yksikön etuliite m (milli) tarkoittaa perusyksikön tuhannesosaa. Yksiköiden etuliitteiden merkitykset ovat taulukkokirjoissa.)

10. 65,27 €/l
(Pullon hinta euroina oli $3{,}85 \cdot \frac{1}{1{,}3298}$ euroa ja tilavuus litroina $1{,}5 \cdot 0{,}029573$ litraa.)

11. 80 km/h (Ajettu matka oli 240 km ja kulunut aika 3 tuntia.)

12. 154,72 km (Matka on ajan ja keskinopeuden tulo. Aika oli $3 + \frac{38 \cdot 60 + 35}{3\,600}\ \text{h} \approx 3{,}64306\ \text{h}$.)

13. a) 16 m
($57\ \text{km/h} = 57\,000\ \text{m/h} = \frac{57\,000}{3\,600}\ \text{m/s}$)

b) 31,18 km/h
($46{,}18\ \text{s} = \frac{46{,}18}{3\,600}\ \text{h} \approx 0{,}0128278\ \text{h}$.
Keskinopeus on $\frac{0{,}4}{0{,}0128278}\ \text{km/h}$.)

14. 1.14,2
(Hevonen juoksi 1,609 km 119,4 sekunnissa. Aika kilometriä kohden oli
$\frac{119{,}4}{1{,}609}\ \text{s} \approx 74{,}2\ \text{s}$.
Voidaan myös käyttää verrantoa:
$\frac{x}{119{,}4} = \frac{1}{1{,}609}$.)

15. 98,1 m (Pinta-ala $253 \cdot 10\,000\ \text{m}^2$ jaetaan alueen pituudella 25 800 m.)

16. a) 40 000 markkaa (200 miljardia on 200 000 miljoonaa. Voidaan myös käyttää kymmenpotenssimuotoja. 200 miljardia on $200 \cdot 10^9$ ja 5 miljoonaa on $5 \cdot 10^6$.)
b) syntymäpäivästä riippuen vuonna 2014 tai vuonna 2015 (Vuodessa on $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ sekuntia. Gigasekunti tulee täyteen 31,7 vuoden kuluttua.)

17. a) 1,5 ml (Henkilön on saatava lääkeainetta 750 mikrogrammaa minuutissa.)
b) 5 tuntia 10 minuuttia ($\frac{465}{1{,}5}$ minuuttia)

18. 13 l
(Auto kuluttaa $18 \cdot 1{,}609 = 28{,}962$ kilometrin matkalla 3,7854 litraa polttoainetta. Kulutus sadan kilometrin matkalla voidaan laskea verrannon avulla: $\frac{x}{3{,}7854} = \frac{100}{28{,}962}$.
Voidaan myös esimerkiksi laskea kulutus yhdellä kilometrillä ja kertoa sadalla.)

19. $7\frac{1}{9}$

(Yhtälön juuri on $x = -\frac{1}{3}$, ja

$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 6 \cdot (-\frac{1}{3}) + 5 = \frac{1}{9} + 2 + 5$.)

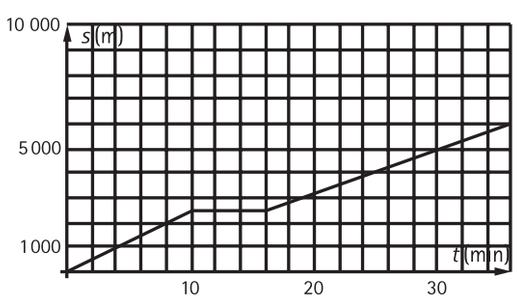
20. $-\frac{55}{6} = -9\frac{1}{6}$ (Tulee olla $\frac{1}{5} + \frac{1}{b} = \frac{1}{11}$.
Siis $\frac{1}{b} = \frac{1}{11} - \frac{1}{5}$ eli $\frac{1}{b} = -\frac{6}{55}$.)

21. $\frac{2}{15}$ ($\frac{ax}{b} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}\,\cancel{b}^{\,1}}{\cancel{b}_{\,1}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$)

22. 120 km/h (Alkumatkaan kului aikaa $\frac{28}{80}$ h = 0,35 h ja koko ajomatkaan $\frac{75}{100}$ h = 0,75 h, joten moottoritieosuuteen kului aikaa 0,75 h – 0,35 h = 0,40 h.
Moottoritieosuuden pituus oli 75 km – 28 km = 47 km. Keskinopeus moottoritieosuudella oli $\frac{47}{0{,}40}$ km/h.)

23. a) Koulumatkan pituus on 500 m.
Ville saapui kouluun kello 8.09.
Nopeus oli 7,5 km/h.
(Noudettuaan laukkunsa Ville kulki 0,5 km ajassa 4 min = $\frac{4}{60}$ h.)

b)



24. 1 085 m eli 2,7 ratakierrosta
(Matka, jonka Mäki olisi juossut 26,635 minuutissa, on $\frac{26{,}635}{29{,}8767} \cdot 10\,000$ m ≈ 8915 m.
Tähän voidaan päätyä myös verrannolla:
$\frac{x}{10\,000} = \frac{26{,}635}{29{,}8767}$.
Matkaa olisi ollut jäljellä 10 000 m – 8 915 m.)

25. vähintään 88 m
(Koska auto etenee tunnissa 100 km, niin kauhusekunnin aikana auto etenee $\frac{100}{3\,600}$ km $\approx 0{,}028$ km $= 28$ m. On varauduttava siihen, että perässä ajavan auton jarrutusmatka on 50 m pitempi kuin edellä ajavan auton. Autojen etäisyyden tulee siis olla vähintään 28 m + 50 m + 10 m.)

26. 3.45
(Koko edestakaiseen matkaan kului aikaa 18 h 35 min, josta B:ssä seisottiin 1 h 55 min. Lentomatkoihin kului siis aikaa 16 h 40 min. Jos paluumatkaan kulunut aika oli x h, niin $x + x - 1 = 16$ h 40 min, joten $x = 8$ h 50 min. Kone lähti B:stä kello 18.55, joten se saapui A:han, kun kellonaika B:ssä oli 8h 50 min enemmän eli 3.45.)

Prosenttilaskenta

27. 38 % (Pääsykokeeseen osallistui 644 pyrkijää, joista 244 sai aloituspaikan.)

28. 32 000 t

29. 2,25 % (Korko 4 781,30 euron talletuksesta oli 71,72 euroa, joten toisesta tilistä saatiin korkoa
348,74 € – 71,72 € = 277,02 €.)

30. a) 4,5 % (Suolan määrä on
$0{,}060 \cdot 3{,}0$ kg $= 0{,}18$ kg ja koko liuoksen määrä 4,0 kg.)
b) 17 % (Suolan määrä on
0,18 kg + 0,40 kg = 0,58 kg ja koko liuoksen määrä 3,4 kg.)
c) 8,4 % (Suolan määrä on
$0{,}060 \cdot 3{,}0$ kg $+ 0{,}12 \cdot 2{,}0$ kg $= 0{,}42$ kg ja koko liuoksen määrä 5,0 kg.)

31. 33 m^2

32. 218,40 euroa ($0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 520$ €)

33. 19 %
(Vanha matka-aika oli 89 minuuttia, ja $\frac{17}{89} \approx 0{,}19 = 19$ %.)

34. a) Suomenhevosten määrä on vähentynyt 2,0 % ja lämminverihevosten kasvanut 250 %.
b) 91 %

35. 2,9 %
(Käteen jäi tammikuussa
$0{,}69 \cdot 3\,815{,}00$ € $= 2\,632{,}35$ euroa ja helmikuussa $0{,}71 \cdot 3\,815{,}00$ € $= 2\,708{,}65$ euroa.)

36. Hannu 262,80 euroa ja Maria 302,20 euroa
(Jos x on Hannun palkkio, niin
$x + 1{,}15x = 565$ eli $2{,}15x = 565$.)

37. 17,4 % pienempi
(Merkitään joulusesonkia edeltävää hintaa a. Joulusesongin hinta on $1{,}18a$ ja alennusmyyntihinta $0{,}70 \cdot 1{,}18a = 0{,}826a$.)

38. Suurenivat 12 %.
(Jos kilohinta ennen oli a ja myynti b yksikköä, niin myynnistä saatavat tulot olivat ab. Hinnanalennuksen jälkeen kilohinta oli $0{,}7a$, myynti $1{,}6b$ ja myynnistä saatavat tulot $0{,}7a \cdot 1{,}6b = 1{,}12ab$.)

39. a) 0,19 litraa $(0{,}38 \cdot 0{,}5$ l)

b) 7,9 % $\left(\frac{0{,}19}{2{,}4} \approx 0{,}079\right)$

40. 3,2 miljoonaa euroa
(Olkoon x ensimmäisen neljänneksen liikevaihto miljoonina euroina. Ratkaistaan yhtälö $x + 0{,}89x = 6{,}0$ eli yhtälö $1{,}89x = 6{,}0$.)

41. 6 900 GWh
(Kokonaiskulutus ratkaistaan yhtälöllä $0{,}18x = 14\,717$,
josta saadaan $x \approx 81\,761$ (GWh).
Teollisuuden ja rakentamisen kulutus oli $0{,}53 \cdot 81\,761$ ja metalliteollisuuden kulutus $0{,}16 \cdot 0{,}53 \cdot 81\,761 \approx 6\,900$ (GWh).)

42. 40 %
(Merkitään äänioikeutettujen määrää a. Äänestäjiä oli $0{,}71a$ ja KYLLÄ-äänien määrä $0{,}57 \cdot 0{,}71a = 0{,}4047a$.)

43. a) 3,6 % (Jos obligaation arvo on a, niin vuotuinen koron määrä on $0{,}05a$. Kun korosta vähennetään 28 %:n lähdevero, saadaan todellinen koron määrä
$0{,}72 \cdot 0{,}05a = 0{,}036a$.
Todellinen korko on siis 3,6 %.)
b) 6,94 % (Olkoon x vuotuinen korkokerroin. Tulee olla $0{,}72xa = 0{,}05a$ eli

$x = \frac{0{,}05}{0{,}72} \approx 0{,}0694$.)

44. 16 % (Olkoon a pesujauheiden kokonaismyynti vuonna 1995, jolloin tutkittavan pesujauheen myynti oli $0{,}15a$. Vuonna 1996 kokonaismyynti oli $1{,}1a$ ja ko. pesujauheen myynti $1{,}2 \cdot 0{,}15a = 0{,}18a$. Markkinaosuus vuonna 1996 oli

$\frac{0{,}18a}{1{,}1a} = \frac{0{,}18}{1{,}1} \approx 0{,}16 = 16$ %.)

45. 55 % (Olkoon a lääkäreiden määrä vuonna 1996, jolloin lääkärien määrä vuonna 2006 oli $1{,}32a$. Naispuolisten lääkäreiden määrä vuonna 1996 oli $0{,}46a$ ja vuonna 2006 $0{,}54 \cdot 1{,}32a = 0{,}7128a$. Koska

$\frac{0{,}7128a}{0{,}46a} = \frac{0{,}7128}{0{,}46} \approx 1{,}55 = 155$ %,

naislääkäreiden määrä kasvoi 55 %.)

46. pieneni 4,34 %
(Merkitään alkuperäistä perusmaksua a, jolloin uusi perusmaksu on $1{,}116a$. Henkilön maksama entinen maksu oli $0{,}35a$ ja uusi $0{,}3 \cdot 1{,}116a = 0{,}3348a$. Koska

$\frac{0{,}3348a}{0{,}35a} = \frac{0{,}3348}{0{,}35} \approx 0{,}9566 = 95{,}66$ %,

maksu pieneni 4,34 %.)

47. 995 euroa, normaalilla hinnalla myyntikate on 63 %.
(Normaalihinta x ratkaistaan yhtälöllä $0{,}8x = 1{,}22 \cdot 1{,}3 \cdot 502$. Kun hinta on 995 euroa, yhtälöllä $1{,}22h = 995$ saadaan arvonlisäveroton hinta $h \approx 816$ euroa. Siis normaalin hinnan myyntikate on 314 euroa, mikä on 63 % tukkuhinnasta 502 euroa.)

48. a) Vähentyi 1 %. b) Lisääntyi 0,8 %.
(Olkoon muropaketin alkuperäinen paino a, alkuperäinen hinta b ja pakettien alkuperäinen myynti c. Uusi paino, hinta ja myynti ovat $1{,}1a$, $1{,}12b$ ja $0{,}9c$.
a) Myytyjen pakettien paino oli ennen ac ja muutosten jälkeen $1{,}1a \cdot 0{,}9b = 0{,}99ac$.
Painolla mitattuna myynti väheni 1 %.
b) Pakettien myynnistä saatu raha oli ennen bc ja muutosten jälkeen
$1{,}12b \cdot 0{,}9c = 1{,}008bc$.
Rahalla mitattuna myynti kasvoi 0,8 %.)

49. lokakuussa 2009
(Kuukaudessa maksetaan korkoa
$\frac{5{,}13\ \%}{12} = 0{,}4275\ \%$ lainapääomasta.
Helmikuun 2006 korko oli 95,88 euroa.
Jos x on lainapääoma ennen helmikuun lyhennystä, niin $0{,}004275x = 95{,}88$, joten
$x = \frac{95{,}88}{0{,}004275} \approx 22\,430$ euroa. Koska
$\frac{22\,430}{500} = 44{,}86$, niin helmikuun lyhennyksen jälkeen tarvitaan vielä 44 lyhennystä.
Koska $44 = 3 \cdot 12 + 8$, laina on kokonaan maksettu kolmen vuoden ja kahdeksan kuukauden kuluttua lokakuussa vuonna 2009.)

50. 20,2 % ja 73,4 %
(Merkitään kotitalouksien määrää kirjaimella a. Niiden kotitalouksien määrä, joilla oli käytössään sekä matkapuhelin että lankapuhelin, oli $0{,}785a - 0{,}229a = 0{,}556a$.
Niiden kotitalouksien määrä, joilla oli vain lankapuhelin, oli $0{,}758a - 0{,}556a = 0{,}202a$, mikä on 20,2 % määrästä a.
Koska $\frac{0{,}556a}{0{,}758a} = \frac{0{,}556}{0{,}758} \approx 0{,}734$,
niin 73,4 %:lla lankapuhelintalouksista on myös matkapuhelin.)

51. 83 %
(Jos turpeen määrä alussa on a, niin turpeessa olevan veden määrä on $0{,}6a$ ja muiden aineiden määrä $0{,}4a$. Haihdutuksen jälkeen muiden aineiden määrä on 80 % kuivatun turpeen määrästä x, joten $0{,}8x = 0{,}4a$ ja
$x = \frac{0{,}4a}{0{,}8} = 0{,}5a$. Veden määrä kuivauksen jälkeen on siis $0{,}1a$. Koska
$\frac{0{,}1a}{0{,}6a} \approx 0{,}17 = 17\ \%$, veden määrä on vähentynyt 83 %.)

Polynomilaskenta ja ensimmäisen asteen yhtälö

52. a) -2 $((-3)^2 - (-3) - 14 = 9 + 3 - 14)$
b) -44 $(-5^2 - 2 \cdot 5 - 9 = -25 - 10 - 9)$

53. a) $5x^2 - 10x - 7$
b) $5a^2 - 8a + 5$
$(2a^2 - 3a + 4 + 3a^2 - 5a + 1)$

54. $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$

$((x^2 - x) - (\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x) = x^2 - x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x.$

Termejä yhdistettäessä kertoimiksi tulee

$1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ ja $-1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$.)

55. a) $15x^5$ $((-3) \cdot (-5) \cdot x^2 \cdot x^3)$

b) $-2t^3 + 14t^2$ $(-2t \cdot t^2 + 2t \cdot 7t)$

56. a) $4x - 18$

b) $-s^2 + 2s$ $(6s - s^2 - 4s)$

c) $-7x + 12$ $(2x - 9x + 12)$

57. a) $6x^2 - 17x + 12$

b) $25x^2 - 40x + 16$

c) $x^3 + 10x^2 + 25x$ $(x(x^2 + 10x + 25))$

58. $18x^2 - 9$, lausekkeen arvo on -3.

$(18 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 - 9 = 18 \cdot \frac{1}{3} - 9 = 6 - 9)$

59. a) $x = -\frac{1}{3}$ (Yhtälö sievenee muotoon $-3x = 1$ tai $-1 = 3x$. Vastaukseksi annetaan tarkka arvo (murtolukumuoto), ei siis laskimella laskettua likiarvoa.)

b) $x = 0$ (Kun yhtälöstä poistetaan sulkeet, se tulee muotoon $4 - 2x + 6 = x + 10$.)

60. a) $x = 8$ (Kun yhtälö kerrotaan luvulla 12, se tulee muotoon $3x + 8 = 4x$.)

b) $x = -\frac{5}{6}$ (Kun yhtälö kerrotaan luvulla 9, se tulee muotoon $3x - 5 = 9x$.)

61. $x = \frac{9}{7}$

(Kun lasketaan $(x - 3)^2$ eli $(x - 3)(x - 3)$, yhtälö tulee muotoon $x^2 - 6x + 9 = x^2 + x$.)

62. vähintään 30 (Tilannetta kuvaa yhtälö $2{,}90x = 45 + 1{,}35x$, josta saadaan $x \approx 29{,}03$. Jotta tulot ylittäisivät menot, lakkeja on myytävä vähintään 30.)

63. Taisto 351,07 euroa ja Irmeli 263,93 euroa (Olkoon x yhtä palkkaeuroa vastaava jakoosuus. Tällöin $1801x + 1354x = 615$ ja $x = \frac{615}{3\,155}$. Taiston osuus on $1801 \cdot \frac{615}{3\,155}$ € ja Irmelin osuus $1354 \cdot \frac{615}{3\,155}$ €.

Toinen tapa on esimerkiksi ratkaista Taiston osuus yhtälöstä $\frac{x}{615 - x} = \frac{1\,801}{1\,354}$.)

64. 68 cm (Olkoon x ikkunoiden väli metreinä. Ikkunoiden välejä on 9, joten saadaan yhtälö $10 \cdot 1{,}19 + 2 \cdot 0{,}83 + 9x = 19{,}72$.)

65. 8 991 ja 8 992

(Luonnolliset luvut ovat luvut 0, 1, 2, ... Jos pienempää luvuista merkitään n, saadaan yhtälö $(n + 1)^2 - n^2 = 17\,983$ eli yhtälö $2n + 1 = 17\,983$.)

66. 43,30 euroa

(Ratkaistaan verrantoyhtälö $\frac{x}{230} = \frac{3\,720}{19\,770}$.

Voidaan myös ensin laskea, kuinka paljon yksi kruunu on euroina.)

67. 87 600 euroa
(Rahan arvo pysyy samana, jos se muuttuu samassa suhteessa kuin elinkustannusindeksi. Asunnon ostohintaa vastaava rahamäärä markkoina vuonna 2006 ratkaistaan yhtälöstä $\frac{x}{89\,000} = \frac{1\,662}{284}$.)

68. 659 hertsiä (Jos x on 32,0 cm:n kielen värähtelytaajuus, niin $\frac{x}{494} = \frac{42{,}7}{32{,}0}$.)

69. 16 m (Jos x on kysytty jarrutusmatka metreinä, niin $\frac{x}{52} = \frac{50^2}{90^2}$.)

70. $x = -\frac{1}{3}$ (Kun kerrotaan ristiin, saadaan yhtälö $x^2 + 3x + 2 = x^2 - 3x$.)

71. a) $x = \frac{1}{11}$ (Kun yhtälöstä poistetaan sulkeet, se tulee muotoon $3x + 2 = x - 20x + 4$.)

b) $x = -\frac{6}{5}$ (Kun yhtälö kerrotaan luvulla 30, se tulee muotoon $3x + 2x = 30(x + 1)$.)

72. $x = \frac{1}{3}$, toteuttaa
(Kun yhtälöstä poistetaan sulkeet, se tulee muotoon $15x + 5 - 12 + 8x = 2x$.
Kun lausekkeeseen $27x^3 - 54x + 17$ sijoitetaan $x = \frac{1}{3}$, saadaan

$$27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 54 \cdot \frac{1}{3} + 17$$

$$= 27 \cdot \frac{1}{27} - 54 \cdot \frac{1}{3} + 17$$

$$= 1 - 18 + 17 = 0,$$

joten yhtälö toteutuu.)

73. Kuume on 101 °F, sama lukema lämpötilassa −40 °C.
(Kun $c = 38{,}2$, saadaan yhtälö $38{,}2 = \frac{5}{9}(f - 32)$. Kun yhtälö kerrotaan luvulla 9, saadaan yhtälö $343{,}8 = 5(f - 32)$. Edelleen ratkaistaan x, jolle pätee yhtälö $x = \frac{5}{9}(x - 32)$. Yhtälö tulee muotoon $9x = 5(x - 32)$.)

74. 55,8 tonnia (Olkoon x kysytty paino. Saadaan yhtälö $\frac{x}{56{,}0} = \frac{6370^2}{6380^2}$.)

75. 0,75 kg (Merkitään lisättävän kevytmaidon määrää x (kg). Saadaan yhtälö $0{,}035 \cdot 0{,}5 + 0{,}01x = 0{,}02(0{,}5 + x)$.)

76. 750 m (Aika 3 min 45 s on 0,0625 tuntia. Jos x on koulumatkan pituus kilometreinä, niin $\frac{x}{4} - \frac{x}{6} = 0{,}0625$. Kun yhtälö kerrotaan luvulla 12, saadaan yhtälö $3x - 2x = 0{,}75$.)

77. 7.36 (Kun tavarajunan lähdöstä on kulunut t tuntia, Pendolino on kulkenut $t + \frac{14}{60} \approx t + 0{,}2333$ tuntia. Pendolinon etäisyys Tikkurilasta on $153(t + 0{,}2333)$, ja tavarajunan etäisyys Tikkurilasta on $171 - 95t$. Ratkaistaan yhtälö $153(t + 0{,}2333) = 171 - 95t$.
Saadaan $t \approx 0{,}5456$ h ≈ 33 min.)

78. vähintään 90 m (Olkoon x_1 jarrutusmatka nopeudesta 120 km/h ja x_2 jarrutusmatka nopeudesta 40 km/h. Kysytty matka on erotus $x_2 - x_1$. Matkat x_1 ja x_2 saadaan verrantoyhtälöillä

$\frac{x_1}{57} = \frac{120^2}{90^2}$ ja $\frac{x_2}{57} = \frac{40^2}{90^2}$.)

79. 3 244,86 euroa
(Ennakonpidätys oli 1 034,44 euroa, mikä on 26,6 % palkasta. Siis palkka 3 891,56 euroa ylittää tulorajan x. Ratkaistaan yhtälö $0{,}26x + 0{,}295(3\,891{,}56 - x) = 1\,034{,}44$.)

80. 2 093,75 euroa
(Entinen ennakonpidätysprosentti oli 27 % ja uusi 26,2 %. Käteen jäi nyt 73,8 %.
Jos vanha palkka on x, niin saadaan yhtälö $0{,}738(x + 45{,}00) = 0{,}73x + 49{,}60$,
josta saadaan $x = 2\,048{,}75$.)

81. yli 10 400 kWh, vähintään 27 067 kWh
(Olkoon x (kWh) vuotuinen sähkönkulutus. Hinnat ovat yhtä suuret, kun
$12 \cdot 2{,}98 + 0{,}0551x = 12 \cdot 3{,}50 + 0{,}0545x$.
Yhtälö toteutuu, kun $x = 10\,400$ (kWh).
Koska yhtiön B kulutusmaksu on pienempi, yhtiön B sähkö tulee halvemmaksi, kun kulutus on yli 10 400 kWh.
Ratkaistaan edelleen, mikä sähkönkulutuksen x tulee olla, jotta yhtiön A hinta olisi 10 euroa yhtiön B hintaa suurempi eli
$12 \cdot 2{,}98 + 0{,}0551x = 12 \cdot 3{,}50 + 0{,}0545x + 10$.
Yhtälöstä saadaan $x \approx 27\,067$ (kWh).)

82. 3 304,42 euroa (Alustava hinta oli
$156 \cdot 14 + 89{,}4 \cdot 9{,}2 = 3\,006{,}48$ €.
Jos x on sovittu alennus, niin saadaan yhtälö $1{,}22(3\,006{,}48 - x) = 3006{,}48 + x$, josta saadaan $x \approx 297{,}94$ €. Metsänomistaja maksoi 3 006,48 € + 297,94 €.)

83. a) 2 552,93 euroa
$(728 + 0{,}195(29\,758{,}61 - 20\,400))$
b) 61 901,32 euroa
(Koska ylimmän luokan alarajasta 60 800 euroa jää pidätyksen jälkeen
$60\,800 - 9\,839 = 50\,861$ euroa eli vähemmän kuin 51 709,90 euroa, verotettava vuositulo on suurempi kuin 60 800.
Olkoon x kysytty tulo. Saadaan yhtälö
$x - 51\,709{,}90 = 9\,839 + 0{,}32(x - 60\,800)$.)

Neliöjuuri ja toisen asteen yhtälö

84. a) $\frac{9}{7}$ (Voidaan laskea purkamalla neliö tuloksi: $(3 \cdot \frac{1}{\sqrt{7}})^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \frac{3}{\sqrt{7}}$

$= \frac{3 \cdot 3}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{9}{7}$. Voidaan laskea myös potenssikaavoilla: $\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{3^2}{(\sqrt{7})^2} = \frac{9}{7}$.)

b) $\frac{4}{9}$ $(1 - 4\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2 = 1 - 4 \cdot \frac{(\sqrt{5})^2}{6^2}$

$= 1 - 4 \cdot \frac{5}{36} = 1 - \frac{5}{9}$.

Neliö $\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2$ voidaan laskea myös purkamalla se tuloksi: $\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}}{6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{6}$.)

85. $\frac{7}{12}$

$\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{5}{4} - \frac{2}{3}\right)$

86. a) $x = \sqrt{13}$ tai $x = -\sqrt{13}$ $(x^2 = 13)$

b) $x = \frac{1}{7}$ tai $x = -\frac{1}{7}$ $\left(x^2 = \frac{1}{49}\right)$

c) Ei juuria. $\left(x^2 = -\frac{1}{9}\right)$

d) $x = 0$ $(-3x^2 = 0$ eli $x^2 = 0)$

87. $\sqrt{10}$ $\left(\frac{2}{c} = \frac{c}{5}$, josta $c^2 = 2 \cdot 5\right)$

88. a) 27 m (7,2 a = 720 m^2. Sivun pituus metreinä on $\sqrt{720}$. Tulos pyöristetään lähtötiedon mukaiseen kahden numeron tarkkuuteen.)

b) 360 m (13 ha = 130 000 m^2)

89. a) $x = 2$ tai $x = -3$ $(x^2 + x - 6 = 0)$

b) $x = -1$ tai $x = \frac{1}{2}$

$(-2x^2 - x + 1 = 0$ eli $2x^2 + x - 1 = 0)$

90. $x = \frac{3}{4}$ tai $x = -\frac{2}{3}$ $(12x^2 - x - 6 = 0)$

91. a) $x = 0$ tai $x = 3$ (Yhtälö saatetaan muotoon $x^2 - 3x = 0$, minkä jälkeen voidaan käyttää ratkaisukaavaa tai tulon nollasääntöä.)

b) $x = 3$ tai $x = -\frac{1}{2}$ (Voidaan käyttää tulon nollasääntöä: $(x - 3)(2x + 1) = 0$, kun $x - 3 = 0$ tai $2x + 1 = 0$.
Voidaan myös suorittaa kertolasku ja ratkaista näin saatu yhtälö
$2x^2 - 5x - 3 = 0$ ratkaisukaavalla.)

92. $x = \sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt{2}$ (Kun suoritetaan kertolasku, saadaan yhtälö $x^2 - 9 = -7$.)

93. a) $x = 0$ tai $x = 3$

b) $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ tai $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

(Yhtälö $-x^2 + 3x - 1 = 0$ eli
$x^2 - 3x + 1 = 0$.)

94. ei nollakohtia, arvolla $x = 3$
(Yhtälöllä $x^2 - 6x + 10 = 0$ ei ole juuria. Yhtälön $x^2 - 6x + 10 = 1$ ainoa juuri on $x = 3$.)

95. $x > -3$ (Funktion $2x + 6$ nollakohta on -3 ja kuvaaja nouseva suora.)

96. $x > \frac{1}{6}$ (Funktion f nollakohta on $\frac{1}{6}$ ja kuvaaja laskeva suora.)

97. $-1 < x < 4$ (Funktion f nollakohdat ovat -1 ja 4 ja kuvaaja ylöspäin aukeava paraabeli.)

98. $x < -3$ tai $x > 3$
(Funktion $9 - x^2$ nollakohdat ovat -3 ja 3 ja kuvaaja alaspäin aukeava paraabeli.)

99. $x = \frac{1}{2}$ tai $x = \frac{3}{2}$

(Kun kerrotaan ristiin, saadaan yhtälö
$16x = 4x^2 + 8x + 3$ eli yhtälö
$-4x^2 + 8x - 3 = 0$ eli $4x^2 - 8x + 3 = 0$.)

100. $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

(Ratkaisukaavalla saadaan

$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$ tai $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$.

Välillä $-1 < x < \dfrac{3}{2}$ on juuri $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Vastaukseksi annetaan juuren tarkka arvo.)

101. $x = -\dfrac{1}{2}$ tai $x = \dfrac{1}{5}$

(Kun poistetaan sulkeet, saadaan yhtälö

$x^2 - \dfrac{7}{10}x = \dfrac{1}{10} - x$. Kun yhtälö kerrotaan luvulla 10, saadaan yhtälö

$10x^2 - 7x = 1 - 10x$ eli $10x^2 + 3x - 1 = 0$.)

102. Nollakohdat $-0{,}4$ ja $3{,}5$. Funktio saa negatiivisia arvoja välillä $-0{,}4 < x < 3{,}5$.
(Nollakohdat ratkaistaan yhtälöllä $x^2 - 3{,}1x - 1{,}4 = 0$. Arvojen merkit päätellään hahmotellusta kuvaajasta. Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.)

103. $(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{9})$ ja $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4})$

(Leikkauspisteiden x-koordinaatit saadaan yhtälöllä $5x^2 - x = 1 - x^2$ eli yhtälöllä $6x^2 - x - 1 = 0$. y-koordinaatit lasketaan sijoittamalla x-koordinaatit jommankumman paraabelin yhtälöön.)

104. 2,0 metrin etäisyydellä ja lähempänä
(Olkoon x etäisyys, jossa valaistus on 300 luksia. Etäisyyksien neliöiden suhde on yhtä suuri kuin valaistusten suhteen käänteisluku: $\dfrac{x^2}{3{,}7^2} = \dfrac{88}{300}$.)

105. a) 59,9 kg ja 74,8 kg
(Painot x ja y (kg), joille pätee $\dfrac{x}{1{,}73^2} = 20$ ja $\dfrac{y}{1{,}73^2} = 25$.)

b) enintään 161 cm pitkä ja vähintään 195 cm pitkä (Henkilö, jonka paino on 52 kg, on alipainoisuuden rajalla, jos hänen pituutensa x (m) toteuttaa yhtälön $\dfrac{52}{x^2} = 20$.)

106. 5,0 m ja 3,5 m
(Jos suorakulmion pituus on s (m) ja leveys t (m), niin $2s + 2t = 17{,}0$ ja siis $t = 8{,}5 - s$. Koska suorakulmion pinta-ala on 17,5 m^2, saadaan yhtälö
$s(8{,}5 - s) = 17{,}5$ eli yhtälö
$s^2 - 8{,}5s + 17{,}5 = 0$. Ratkaisukaavalla saadaan $s = 5$ tai $s = 3{,}5$.
Jos $s = 5$, niin $t = 8{,}5 - 5 = 3{,}5$.
Jos $s = 3{,}5$, niin on $t = 8{,}5 - 3{,}5 = 5$.
Molemmat juuret johtavat siis samoihin suorakulmion mittoihin.)

107. 12,4 cm
(Olkoon raidan leveys x. Ristin pinta-ala on keskellä olevan neliön pinta-ala x^2 lisättynä neljän suorakulmion pinta-alalla $4 \cdot 15x$. Saadaan yhtälö
$x^2 + 4 \cdot 15x = 4 \cdot 15^2$ eli yhtälö
$x^2 + 60x - 900 = 0$.)

108. Ei voi olla.
(Ympyrän muotoisella saarella kahden talon etäisyys on pienempi kuin ympyrän halkaisija. Lasketaan ympyrän muotoisen 3,00 hehtaarin suuruisen saaren halkaisijan pituus. Koska $3{,}00\ \text{ha} = 30\,000\ \text{m}^2$, niin yhtälöstä $\pi r^2 = 30\,000$ saadaan ympyrän säde $r = \sqrt{\frac{30\,000}{\pi}} \approx 97{,}7$ (m).
Ympyrän halkaisija on $2r \approx 195$ m.
Koska talojen etäisyys on suurempi kuin 195 m, saari ei voi olla ympyrän muotoinen.)

109. Alueen, jonka pinta-ala on enintään 3,2 ha.
(Olkoon x neliön muotoisen aitauksen sivun pituus metreinä. Neliön pinta-ala on x^2 neliömetriä. Koska $1\ \text{m}^2 = 0{,}0001$ ha, pellon vuokra euroina on
$x^2 \cdot 0{,}0001 \cdot 128 = 0{,}0128x^2$.
Aitauksen piiri on $4x$ metriä ja aitauskustannukset euroina $4x \cdot 0{,}20 = 0{,}8x$.
Saadaan toisen asteen yhtälö
$0{,}0128x^2 + 0{,}8x = 550$ eli
$0{,}0128x^2 + 0{,}8x - 550 = 0$.
Yhtälön positiivinen juuri on $x \approx 178{,}4$.
Alueen pinta-ala on tällöin noin
$32\,000\ \text{m}^2 = 3{,}2$ ha.)

110. 3,80 %
(Olkoon x todellinen korkokerroin eli luku, jolla kertomalla saadaan pääoma, kun siihen on lisätty lähdeveron pidättämisen jälkeen jäänyt korko. Ensimmäisen sijoituksen arvoksi on kolmannen vuoden alussa tullut $x^2 \cdot 5\,000$ € ja toisen sijoituksen arvoksi $x \cdot 4\,500$. Saadaan toisen asteen yhtälö $5000x^2 + 4500x = 9894{,}85$ eli yhtälö $5000x^2 + 4500x - 9894{,}85 = 0$.
Yhtälön positiivinen juuri on $x \approx 1{,}02698$.
Korko lähdeveron vähentämisen jälkeen on 2,698 %. Tämä korko on 71 % tilin verottomasta korosta p, eli jos veroton korko on p, niin $0{,}71p = 2{,}698a$, josta saadaan
$p = \frac{2{,}698}{0{,}71} = 3{,}8$.)

Potenssi ja eksponenttifunktio

111. 12 000 $(1{,}034^{12} \cdot 8\,300)$

112. a) $7x^6$ $(-x^6 - (-8x^6) = -x^6 + 8x^6)$
b) $-39x^{18}$ $(-64x^{18} + 25x^{18})$

113. $\frac{x^4}{49}$, tarkka arvo $\frac{9}{49}$ $(\frac{7^4x^{12}}{7^6x^8})$

114. $\frac{7}{12}$ $(1 - 2 \cdot \frac{1}{6} - 3 \cdot \frac{1}{36} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{12})$

115. viisi ensimmäistä numeroa 2, 0, 9, 8 ja 8, kaikkiaan 44 numeroa
($\frac{2^{148}+1}{17} \approx 2{,}0988937 \cdot 10^{43}$; luvussa on yhtä monta numeroa kuin luvussa $1 \cdot 10^{43}$, jossa on ykkönen ja 43 nollaa.)

116. Elektronin massa on pienempi, 0,054 %.

$\left(\frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}}{1{,}7 \cdot 10^{-27}} \approx 0{,}00054 = 0{,}054\ \%\right)$

117. a) 33 000 $(7{,}9^{1{,}5} \cdot 1\,500)$

b) 2 500 $(7{,}9^{\frac{1}{4}} \cdot 1\,500 = 7{,}9^{0{,}25} \cdot 1\,500)$

118. funktio $0{,}9773^x \cdot 3{,}28$

a) 2,32 kg $(0{,}9773^{15} \cdot 3{,}28)$

b) 3,39 kg $(0{,}9773^{-1{,}5} \cdot 3{,}28)$

119. a) 3 b) 12 c) 1 230

120. –0,477 $\left(x = \lg \frac{1}{3}\right)$

121. a) $2{,}5 \cdot 10^{12}$ $(a = 10^{12{,}4})$

b) 0,013 ($\lg a = -1{,}9$, joten $a = 10^{-1{,}9}$.)

122. a) 4,3 $(y = 1{,}5 \lg 17000 - 2{,}0)$

b) 63 (Yhtälöstä $1{,}5 \lg x - 2{,}0 = 0{,}70$ saadaan $1{,}5 \lg x = 2{,}7$ ja edelleen $\lg x = 1{,}8$. Siis $x = 10^{1{,}8}$.)

123. $x \approx 3{,}58$ $\left(x = \frac{\lg 12}{\lg 2}\right)$

124. 21 vuodessa

(Saadaan yhtälö $1{,}02^x \cdot 3000 = 4\,500$ eli yhtälö $1{,}02^x = 1{,}5$. Yhtälön ratkaisu on $x = \frac{\lg 1{,}5}{\lg 1{,}02} \approx 20{,}48$. Ratkaisu on pyöristetty seuraavaan kokonaiseen vuoteen.)

125. a) $x = 11$ tai $x = -11$ (luvun 1 771 561 kuudes juuri ja sen vastaluku)

b) $x = 13$ (luvun 371 293 viides juuri)

126. a) $x = \sqrt[8]{12} \approx 1{,}36$ tai $x = -\sqrt[8]{12} \approx -1{,}36$

(Luvut $\sqrt[8]{12}$ ja $-\sqrt[8]{12}$ ovat juurten tarkat arvot.)

b) $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 0{,}87$

127. pohjasärmä 17,1 cm, korkeus 34,2 cm

($10\ \text{l} = 10\ \text{dm}^3$. Jos pohjasärmän pituus desimetreinä on x, niin tilavuus on $x \cdot x \cdot 2x$. Saadaan yhtälö $2x^3 = 10$ eli $x^3 = 5$.

Siis $x = \sqrt[3]{5} \approx 1{,}71$ (dm).)

128. 5,8 % (Yhtälöstä $k^6 \cdot 25\,000 = 35\,000$ saadaan $k^6 = 1{,}4$. Siis $k = \sqrt[6]{1{,}4} \approx 1{,}058$. Pääoma tuli vuodessa keskimäärin 1,058-kertaiseksi eli kasvoi 5,8 %.)

129. 4,5 % (Olkoon aineen määrä nyt a. Yhtälöstä $k^{15}a = 0{,}5a$ eli yhtälöstä $k^{15} = 0{,}5$ saadaan $k = \sqrt[15]{0{,}5} \approx 0{,}955$. Määrä tulee joka vuorokausi 0,955-kertaiseksi eli vähenee 4,5 %.)

130. $8 \cdot 10^{15}$ (Hiukkasen viemä tila on kuutio, jonka sivun pituus on

$0{,}005\ \text{mm} = 0{,}0005\ \text{cm} = 0{,}000005\ \text{m}$.

Kuution tilavuus on $0{,}000005^3\ \text{m}^3$. Kuutiometriin mahtuvien hiukkasten määrä on $\frac{1}{0{,}000005^3}$.)

131. 6 200 markkaa vuonna 1997,
420 euroa vuonna 2004
(Jos x oli hinta vuonna 1997, niin $0{,}88^3x = 4\,200$, josta $x \approx 6\,200$ (mk). Hinta vuonna 2004 olisi $0{,}88^4 \cdot 4\,200 \approx 2\,518{,}7$ mk. Vasta eurohinta pyöristetään kahden numeron tarkkuuteen.)

132. sievennetty muoto $4ab$, arvo 4
$((a+b)^2 - (a-b)^2$
$= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$,
$4 \cdot 10^{300} \cdot 10^{-300} = 4 \cdot 10^{300} \cdot \dfrac{1}{10^{300}}$
$= 4 \cdot 1 = 4$)

133. 2000/34° ja 200/24°
(Jos $S = 2000$, niin $S° = 1 + 10 \lg 2000 \approx 34$. Jos $S° = 24$, niin $1 + 10 \lg S = 24$ eli $\lg S = 2{,}3$. Siis $S = 10^{2{,}3} \approx 200$.)

134. a) aikavälillä 1950–1970 2,0 %,
aikavälillä 1970–2000 1,6 %
(Jos aikavälillä 1950–1970 väkiluku tuli joka vuosi kerrotuksi samalla luvulla k, niin $k^{20} \cdot 2{,}5 = 3{,}7$. Yhtälöstä saadaan $k = \sqrt[20]{\dfrac{3{,}7}{2{,}5}} \approx 1{,}020$. Vastaavasti aikavälillä 1970–2000 saadaan $k^{30} \cdot 3{,}7 = 6{,}0$, josta $k = \sqrt[30]{\dfrac{6{,}0}{3{,}7}} \approx 1{,}016$.)

b) vuonna 2040 tai 2041
(Jos väkiluku kasvaa joka vuosi 1,0 %, niin x vuoden kuluttua väkiluku on $1{,}010^x \cdot 6{,}0$. Yhtälöstä $1{,}010^x \cdot 6{,}0 = 9{,}0$ saadaan $x = \dfrac{\lg 1{,}5}{\lg 1{,}010} \approx 40{,}7$. Raja saavutetaan 40,7 vuoden kuluttua eli vuonna 2040 tai 2041.)

135. a) 5,4 %
(Olkoon päästöjen määrä nyt a. Jos päästöjen määrä tulee joka vuosi k-kertaiseksi, niin tulee olla $k^4a = 0{,}8a$ eli $k^4 = 0{,}8$.
Siis $k = \sqrt[4]{0{,}8} \approx 0{,}946$.)

b) 13 vuoden kuluttua
(Jos päästöjä vähennetään joka vuosi 5,4 %, niin x vuoden kuluttua päästöjen määrä on $0{,}946^x a$. Yhtälöstä $0{,}946^x a = 0{,}5a$ eli yhtälöstä $0{,}946^x = 0{,}5$ saadaan $x = \dfrac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}946} \approx 12{,}5$. Päästöt vähenevät alle puoleen 13 vuodessa.)

136. 321 000 000 km
(Olkoon x Niilon etäisyys Auringosta kilometreinä. Etäisyyksien kuutioiden suhde on yhtä suuri kuin kiertoaikojen neliöiden suhde eli $\dfrac{x^3}{(149{,}6 \cdot 10^6)^3} = \dfrac{3{,}15^2}{1^2}$, josta saadaan $x^3 = (149{,}6 \cdot 10^6)^3 \cdot 3{,}15^2$. Etäisyys on yhtälön oikean puolen kuutiojuuri.)

137. 114 vuoden kuluttua
(Olkoon saasteen määrä vedessä a. Saasteen määrä tulee joka vuosi 0,98-kertaiseksi. On ratkaistava, kuinka monen vuoden kuluttua saasteen määrä on vähentynyt kymmenesosaan eli määrään $0{,}1a$. Yhtälö $0{,}98^x a = 0{,}1a$ jaetaan a:lla, jolloin saadaan yhtälö $0{,}98^x = 0{,}1$, josta $x = \dfrac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}98} \approx 113{,}97$. Koska saasteen määrä vähenee koko ajan, saastepitoisuus vähenee kymmenesosaan 114 vuoden kuluttua.)

138. 100 %

(Merkintä $\log_{10} I$ tarkoittaa luvun I 10-kantaista logaritmia $\lg I$. Siis $D = 10(\lg I + 12)$. Ratkaistaan intensiteetti I, kun $D = 65$ ja kun $D = 68$. Yhtälöstä $10(\lg I + 12) = 65$ saadaan $\lg I + 12 = 6{,}5$ ja edelleen $\lg I = -5{,}5$, joten $I = 10^{-5{,}5}$. Vastaavasti yhtälöstä $10(\lg I + 12) = 68$ saadaan $\lg I = -5{,}2$, jolloin $I = 10^{-5{,}2}$.

Koska $\dfrac{10^{-5{,}2}}{10^{-5{,}5}} \approx 2{,}00 = 200\ \%$, äänen intensiteetti oli 100 % sallittua suurempi.)

139. Kokonaisluku 6^{2999} on parillinen ja luku 3^{4891} on pariton, joten luvut eivät voi olla yhtä suuret. $6^{2999} \approx 10^{2333{,}7}$ ja $3^{4891} \approx 10^{2333{,}6}$, joten luku 6^{2999} on suurempi.

(Koska $6 = 10^{\lg 6}$, niin $6^{2999} = (10^{\lg 6})^{2999} = 10^{2999 \cdot \lg 6} \approx 10^{2333{,}676}$. Vastaavasti $3^{4891} = 10^{4891 \cdot \lg 3} \approx 10^{2333{,}600}$.)

140. 620 g

(Ratkaistaan ensin, millä luvulla k aineen määrä tulee kerrotuksi joka tunti. Jos aineen määrä alussa on a, niin $k^3 a = 0{,}5a$ eli $k^3 = 0{,}5$. Siis $k = \sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}7937$.

Olkoon x eläimelle annettava aineen vähimmäismäärä.

Koska 1 h 15 min = 1,25 h, tulee olla $0{,}7937^{1{,}25} x = 20 \cdot 23$ (mg) eli

$$x = \frac{460}{0{,}7937^{1{,}25}} \approx 614 \text{ (mg)}.$$

Aineen määrä on pyöristetty ylöspäin, jotta aine varmasti riittäisi.)

141. 20 000 vuotta vanha

(Olkoon isotoopin määrä alussa a. Määrä vähenee joka vuosi yhtä monta prosenttia, joten määrä tulee joka vuosi kerrotuksi samalla luvulla k. Koska $k^{5730} a = 0{,}5a$ eli $k^{5730} = 0{,}5$, niin $k = \sqrt[5730]{0{,}5} \approx 0{,}999879$.

Yhtälöllä $k^x a = 0{,}09a$ eli $k^x = 0{,}09$ ratkaistaan, missä ajassa määrä vähenee 9 %:iin. Saadaan $x = \dfrac{\lg 0{,}09}{\lg k} \approx 19\,900$.

Likiarvoa laskiessa kannattaa käyttää laskimessa olevaa k:n likiarvoa tai vähintään kuusidesimaalista likiarvoa, koska k:n likiarvon todellinen tarkkuus alkaa vasta alkuyhdeksikköjen jälkeen.)

142. 3,1 %, 100–120 tuntia

(Jos lääkeaineen määrä alussa on a, niin puoliintumisajan kuluttua ainetta on jäljellä $0{,}5a$, kahden puoliintumisajan kuluttua $0{,}5 \cdot 0{,}5a = 0{,}5^2 a$ jne. Viiden puoliintumisajan kuluttua aineen määrä on $0{,}5^5 a = 0{,}03125a$.

Kun on kulunut x puoliintumisaikaa, aineen määrä on $0{,}5^x a$. Lääkeaineesta on poistunut 99 %, kun $0{,}5^x a = 0{,}01a$ eli $0{,}5^x = 0{,}01$. Saadaan $x = \dfrac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}5} \approx 6{,}644$.

On siis odotettava 6,644 puoliintumisaikaa eli 100–120 tuntia.)

143. elokuussa 2006

(Olkoon talletetun summan suuruus a. Kun jälkimmäisestä talletuksesta tammikuun alussa 2003 on kulunut x vuotta, niin talletukset ovat $1{,}0254^x \cdot 1{,}0254a$ ja $1{,}0325^x a$.

Kun yhtälö $1{,}0325^x a = 1{,}0254^x \cdot 1{,}0254a$ eli yhtälö $1{,}0325^x = 1{,}0254^x \cdot 1{,}0254$ jaetaan $1{,}0254^x$:llä, saadaan yhtälö

$$\frac{1{,}0325^x}{1{,}0254^x} = 1{,}0254 \text{ eli } \left(\frac{1{,}0325}{1{,}0254}\right)^x = 1{,}0254.$$

Siis $x = \dfrac{\lg 1{,}0254}{\lg \dfrac{1{,}0325}{1{,}0254}} \approx 3{,}64.$

Talletukset ovat yhtä suuret 3,64 vuoden eli 3 vuoden ja 7,7 kuukauden kuluttua vuoden 2003 tammikuun alusta.)

Lukujonot ja summat

144. 1, 4, $\frac{1}{27}$, 256, $\frac{1}{3125}$

($a_1 = 1^{-1} = \frac{1}{1}$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$, $a_4 = 4^4$, $a_5 = 5^{-5} = \frac{1}{5^5}$)

145. a) 3, 7, 15, 31 ja 63 (Edellinen jäsen kerrotaan kahdella ja tuloon lisätään 1.)
b) 1, 1, 5, 10, 20 (Kahden edeltävän jäsenen summaan lisätään jäsenen järjestysnumero.)

146. $a_n = \frac{n+6}{2n}$, $a_{181} = \frac{187}{362}$

(Osoittajat ovat $1+6$, $2+6$ jne. ja nimittäjät $2 \cdot 1$, $2 \cdot 2$ jne.)

147. Luku 2 011 ei ole. Luku 6 313 on jonon 372. jäsen.

(Yhtälön $17n - 11 = 2\,011$ juuri $\frac{2022}{17}$ ei ole positiivinen kokonaisluku.
Yhtälö $17n - 11 = 6313$ toteutuu, kun $n = 372$.)

148. 599

(Peräkkäisten jäsenten erotus on $d = 12$, $a_{50} = 11 + 49 \cdot 12$.)

149. a) Ei ole. b) On, 312. jäsen.

(Jonon n. jäsen on $a_n = 50 + (n-1) \cdot 17 = 17n + 33$. Yhtälön $17n + 33 = 4410$ juuri ei ole positiivinen kokonaisluku. Yhtälön $17n + 33 = 5\,337$ juuri on $n = 312$.)

150. 43

(Jonon yhdeksäs jäsen on $7 + 8d$. Yhtälöstä $7 + 8d = 295$ saadaan $d = 36$. Toinen jäsen on $7 + 36$.)

151. jonon 85 717. jäsen 600 004

(Jonon n. jäsen on $-8 + (n-1) \cdot 7 = 7n - 15$. Yhtälö $7n - 15 = 600\,000$ toteutuu, kun $n \approx 85\,716{,}4$. Koska jonon jäsenet suurenevat, ensimmäinen jäsen joka on suurempi kuin 600 000, on jonon 85 717. jäsen $7 \cdot 85\,717 - 15$.)

152. 29 800

(Jonon sadas jäsen on $1 + 99 \cdot 6 = 595$. Sadan ensimmäisen jäsenen summa on $100 \cdot \frac{1 + 595}{2}$.)

153. 44 tuntia 38 minuuttia

(Aritmeettinen summa, jonka ensimmäinen jäsen on 45 minuuttia, jonka viimeinen jäsen on 210 minuuttia ja jonka yhteenlaskettavien lukumäärä on 21. Summan arvo on $21 \cdot \frac{45 + 210}{2} = 2677{,}5$ (min).)

154. 25 165 824 $(4^{11} \cdot 6)$

155. 28 tai -28

(Olkoon q jonon peräkkäisten jäsenten suhdeluku. Koska $q^8 a_1 = a_9$, niin $7q^8 = 458\,752$ eli $q^8 = 65\,536$. Yhtälön juuret ovat luvun 65 536 kahdeksas juuri 4 ja kahdeksannen juuren vastaluku -4.)

156. lauseke $0{,}75^{n-1}$, jonon 42. jäsen

(Yhtälö $0{,}75^{n-1} = 0{,}00001$ toteutuu, kun $n - 1 = \frac{\lg 0{,}00001}{\lg 0{,}75}$ eli kun $n = \frac{\lg 0{,}00001}{\lg 0{,}75} + 1 \approx 41{,}02$.

Koska jonon jäsenet pienenevät, ensimmäinen jäsen, joka alittaa 0,00001, on jonon 42. jäsen.)

157. 43 046 720 $\left(\frac{2(1 - 3^{16})}{1 - 3}\right)$

158. $q = \frac{1}{2} = 0{,}5$, $S_n = 6400(1 - 0{,}5^n)$,

$S_{13} = 6399{,}21875$

$\left(\frac{1\,600}{3\,200} = \frac{800}{1\,600} = \frac{1}{2} = 0{,}5,\right.$

$S_n = \frac{3200(1 - 0{,}5^n)}{1 - 0{,}5} = \frac{3200(1 - 0{,}5^n)}{1 - 0{,}5}$

$\left. = 6400(1 - 0{,}5^n)\right)$

159. 26,5 %

(Jonon 999. termi on $2 + 998 \cdot 2 = 1\,998$ ja 999 ensimmäisen termin summa $999 \cdot \frac{2 + 1998}{2} = 999\,000$.

Jonon 888. termi on $2 + 887 \cdot 2 = 1\,776$ ja 888 ensimmäisen termin summa $888 \cdot \frac{2 + 1776}{2} = 789\,432$.)

160. a) 1 801, 1 201 ja $-2\,999$

(Koska aritmeettisessa jonossa on $a_5 = a_1 + 4d$, missä d on peräkkäisten jäsenten erotus, niin $2401 + 4d = 1$, joten $d = -600$. Tällöin $a_2 = 2401 + d$, $a_3 = 2401 + 2d$ ja $a_{10} = 2401 + 9d$.

Laskuissa ja vastauksissa voidaan käyttää myös desimaalimuotoa.)

b) 343, 49 ja $\frac{1}{16\,807}$ tai

-343, 49 ja $-\frac{1}{16\,807}$

(Koska geometrisessa jonossa on $a_5 = q^4 a_1$, niin $q^4 \cdot 2\,401 = 1$ eli $q^4 = \frac{1}{2401}$, joten $q = \sqrt[4]{\frac{1}{2401}} = \frac{1}{7}$ tai $q = -\sqrt[4]{\frac{1}{2401}} = -\frac{1}{7}$. Jonoja on siis kaksi, joissa kummassakin on $a_2 = q \cdot 2401$, $a_3 = q^2 \cdot 2401$ ja $a_{10} = q^9 \cdot 2401$.)

161. a) 62 minuuttia $(1{,}05^{29} \cdot 15$ min)

b) 16 tuntia 37 minuuttia

(Lasketaan geometrisen jonon 15, $1{,}05 \cdot 15$, $1{,}05^2 \cdot 15$, ... 30 ensimmäisen jäsenen summa $\frac{15(1 - 1{,}05^{30})}{1 - 1{,}05} \approx 997$ (min).)

162. 62 507,35 €

(Ensimmäisen lainan suuruudeksi on tullut $1{,}04^{12} \cdot 4\,000$ €, toisen $1{,}04^{11} \cdot 4\,000$ € jne. Viimeisen lainan suuruudeksi on tullut $1{,}04 \cdot 4\,000$ €. Koko velka on geometrinen summa $1{,}04 \cdot 4000 + 1{,}04^2 \cdot 4000 + \ldots +$

$1{,}04^{12} \cdot 4000 = \dfrac{1{,}04 \cdot 4000(1 - 1{,}04^{12})}{1 - 1{,}04}$ (€).)

163. 79 950,00 euroa

(Lyhennyseriä on 40 ja jokaisen suuruus on 3 000 euroa. Lainapääomat, joista maksetaan korkoa, ovat 120 000, 117 000, 114 000, ... , 3 000. Korot ovat $0{,}0325 \cdot 120\,000$, $0{,}0325 \cdot 117\,000$, $0{,}0325 \cdot 114\,000$, ... , $0{,}0325 \cdot 3\,000$. Koska koron määrä pienenee aina $0{,}0325 \cdot 3\,000$:lla, korot muodostavat aritmeettisen jonon. Korkojen summa on

$40 \cdot \dfrac{0{,}0325 \cdot 120\,000 + 0{,}0325 \cdot 3\,000}{2}$.)

164. 1 303,5

(Lasketaan, kuinka monta yhteenlaskettavaa summassa on eli kuinka mones termi luku 117 on. Jonossa on $d = 7 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{11}{2}$.

Jonon n. jäsen on $\dfrac{3}{2} + (n - 1) \cdot \dfrac{11}{2}$.

Kun yhtälö $\dfrac{3}{2} + (n - 1) \cdot \dfrac{11}{2} = 117$ kerrotaan 2:lla, saadaan yhtälö

$3 + 11(n - 1) = 234$ ja edelleen $n = 22$.

Summa on $22 \cdot \dfrac{\frac{3}{2} + 117}{2} = 1\,303{,}5$.

Laskuissa voidaan käyttää myös desimaalimuotoja $\dfrac{3}{2} = 1{,}5$ ja $d = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$.)

165. ensimmäinen termi 11,
kymmenes termi 2 883 584

(Olkoon jonon ensimmäinen termi x. Jonon kymmenen ensimmäisen termin summa on tällöin $\dfrac{x(1 - 4^{10})}{1 - 4} = 349525x$.

Siis $349525x = 3\,844\,775$ ja $x = 11$.

Jonon kymmenes termi on $4^9 \cdot 11$.)

166. 3 890 m

(Olkoon x ensimmäisen päivän juoksumatka kilometreinä. Juoksumatkat muodostavat aritmeettisen jonon, jonka 14. jäsen on $x + 13 \cdot 0{,}5 = x + 6{,}5$.

Jonon 14 ensimmäisen jäsenen summa on

$14 \cdot \dfrac{x + (x + 6{,}5)}{2} = 7(2x + 6{,}5)$.

Ratkaistaan yhtälö $7(2x + 6{,}5) = 100$.)

167. 13. viikolla (Myynti n viikon aikana on geometrisen jonon 500, $1{,}4 \cdot 500$, ... n:n ensimmäisen jäsenen summa

$\dfrac{500(1 - 1{,}4^n)}{1 - 1{,}4}$. Yhtälö

$\dfrac{500(1 - 1{,}4^n)}{1 - 1{,}4} = 80\,000$ tulee muotoon

$1{,}4^n = 65$, josta saadaan $n = \dfrac{\lg 65}{\lg 1{,}4} \approx 12{,}4$.

Voidaan myös taulukoida myynnin kokonaismäärä vuosi kerrallaan, kunnes 80 000 ylittyy.)

168. 961

(Summa on aritmeettinen summa, jonka ensimmäinen jäsen on 1, viimeinen jäsen m ja yhteenlaskettavien lukumäärä m.

Summan arvo on $m \cdot \frac{1+m}{2} = \frac{m(1+m)}{2}$.

Ratkaistaan yhtälö $\frac{m(1+m)}{2} = 462\,241$

eli yhtälö $m^2 + m - 924\,482 = 0$. Yhtälö toteutuu, kun $m = 961$ tai $m = -962$.
Siis $1 + 2 + 3 + \ldots + 961 = 462\,241$.
Jos summaa jatketaan, 462 241 ylittyy.
Siis 961 on kysytty suurin mahdollinen luku.)

169. 20. viikon lopussa noin 850 kalaa, on pyydetty noin 8 000 kalaa.
(Kalojen määrät viikkojen alussa muodostavat rekursiivisen jonon, jossa $a_1 = 5\,000$ ja $a_n = 0{,}8a_{n-1} + 200$, kun $n \geqslant 2$.
Laskimella (Ans -näppäin) saadaan $a_{20} \approx 1\,058$. Kalojen määrä 20. viikon lopussa oli $0{,}8 \cdot 1058 \approx 850$.
Kaloja on kaikkiaan tuotu altaaseen $5\,000 + 19 \cdot 200 = 8\,800$ ja kaloja on nyt 850, joten kaloja on pyydetty $8\,800 - 850 = 7\,950$.)

170. $a_4 = \frac{97}{56}$, poikkeaa ylöspäin 0,0053 %.

($a_2 = 2$, $a_3 = \frac{7}{4}$,

$a_4 = \frac{1}{2}(\frac{7}{4} + 3 : \frac{7}{4}) = \frac{1}{2}(\frac{7}{4} + \frac{12}{7})$.

Koska $\frac{97}{56} : \sqrt{3} \approx 1{,}000053$, luku $\frac{97}{56}$ on 0,0053 % lukua $\sqrt{3}$ suurempi.)

171. Vastaava yhtälö on $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$.
Yleisesti $n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1$.
(Koska $4^2 = 16$ ja $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, niin vastaava yhtälö luvulle 4 on $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$.
Vastaava yhtälö luonnolliselle luvulle n on, että luvun n neliö on yhtä suuri kuin n:n ensimmäisen parittoman luonnollisen luvun summa eli $n^2 = 1 + 3 + \ldots + 2n - 1$.
Osoitetaan kaava oikeaksi:
summa $1 + 3 + \ldots + 2n - 1$ on aritmeettinen summa, jossa on n yhteenlaskettavaa. Summan arvo on

$n \cdot \frac{1 + 2n - 1}{2} = n \cdot \frac{2n}{2} = n \cdot n = n^2$.

Siis kaava on oikein.)

172. säästösumman suuruus 6 597,11 €, puhdas tuotto 594,35 €

(Palkkion ja hoitokulun jälkeen kuukausitalletus on

$60\ € - 0{,}02 \cdot 60\ € - 1{,}35\ € = 57{,}45\ €$.

Talletusvuonna tammikuun talletus tuottaa 4,4 %:n korkoa koko vuoden ajalta, helmikuun talletus 11 kuukaudelta jne. Sijoitetuista summista kertyy talletusvuoden aikana korkoa

$$0{,}044 \cdot 57{,}45 + \frac{11}{12} \cdot 0{,}044 \cdot 57{,}45 + \ldots + \frac{1}{12} \cdot 0{,}044 \cdot 57{,}45$$

$$= \frac{12 + 11 + \ldots + 1}{12} \cdot 0{,}044 \cdot 57{,}45$$

$$= \frac{78}{12} \cdot 0{,}044 \cdot 57{,}45 \approx 16{,}43\ (€).$$

Vuoden aikana tehtyjen talletusten arvo vuoden lopussa on

$12 \cdot 57{,}45\ € + 16{,}43\ € = 705{,}83\ €$.

Tämän jälkeen ensimmäisen vuoden talletukset kasvavat korkoa 7 vuotta, toisen vuoden 6 vuotta jne. Säästösumma vakuutuskauden lopussa on

$$1{,}044^7 \cdot 705{,}83 + 1{,}044^6 \cdot 705{,}83 + \ldots + 705{,}83$$

$$= \frac{705{,}83(1 - 1{,}044^8)}{1 - 1{,}044} \approx 6\,597{,}11\ €.$$

Tuotto on $6\,597{,}11\ € - 8 \cdot 12 \cdot 60\ € = 837{,}11\ €$ ja puhdas tuotto

$0{,}71 \cdot 837{,}11\ € \approx 594{,}35\ €$.)

Sarja A

1. a) $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = \frac{1}{5}$ (ratkaisukaavalla)

b) $x = \frac{13}{9}$ (Yhtälö $\frac{4x}{x-1} = 13$ voidaan kirjoittaa muotoon $\frac{4x}{x-1} = \frac{13}{1}$ ja kertoa ristiin. Yhtälö voidaan myös kertoa lausekkeella $x - 1$.)

2. a) 15,5 % (Vanha tuntipalkka oli 15,26 €. Palkankorotus prosentteina oli

$\frac{2{,}37}{15{,}26} \approx 0{,}155 = 15{,}5\ \%$.)

b) sievennetty muoto $x^2 - 2x$, lausekkeen arvo $\frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$

($2x - x(4 - x) = 2x - 4x + x^2 = x^2 - 2x$, lausekkeen arvo tulee ilmaista tarkkana arvona (murtolukumuoto tai sekaluku).)

3. 12 000 m

(9 000 metriä sukkahousujen lankaa painaa 15 g, joten yksi gramma lankaa on pituudeltaan $\frac{9000}{15}$ m = 600 m. Sukkahousuissa on $20 \cdot 600$ m lankaa. Sukkahousujen langan pituus voidaan ratkaista myös verrannolla: $\frac{x}{9000} = \frac{20}{15}$.)

4. 2 h 50 min (Henkilön elimistö hajottaa tunnissa 9 g puhdasta alkoholia.

$8\ \text{cl} = 0{,}08\ \text{l} = 0{,}08\ \text{dm}^3 = 80\ \text{cm}^3$,

joten puhtaan alkoholin määrä on

$0{,}40 \cdot 80\ \text{cm}^3 = 32\ \text{cm}^3$ ja paino

$32 \cdot 0{,}79\ \text{g} = 25{,}28\ \text{g}$.

Palaminen kestää $\frac{25{,}28}{9} \approx 2{,}81$ tuntia.)

5. 27 minuutissa (Jotta koko 25 km:n matkan keskinopeus olisi 23 km/h, matka tulisi pyöräillä ajassa

$\frac{25}{23}$ h $= \frac{25}{23} \cdot 60$ min ≈ 65 min.

Loppumatka tulee pyöräillä ajassa
65 min – 38 min.)

6. 14 cm (Olkoon kysytty korkeus x cm. Nestepintojen korkeuksien neliöiden suhde on yhtä suuri kuin tilavuuksien suhde eli

$\frac{x^2}{10^2} = \frac{2}{1}$. Kertomalla ristiin saadaan yhtälö

$x^2 = \sqrt{200}$.)

7. a) 1 800 ($1{,}25^6 \cdot 470 \approx 1792$)

b) 500 000

(Geometrinen summa

$1{,}25 \cdot 470 + 1{,}25^2 \cdot 470 + \ldots + 1{,}25^{25} \cdot 470$

$= \frac{1{,}25 \cdot 470(1 - 1{,}25^{24})}{1 - 1{,}25} \approx 495\,282.$)

8. 1 osa liuosta ja 7 osaa vettä,
1,25 l liuosta ja 8,75 l vettä
(Olkoon a 40-prosenttisen liuoksen määrä, jolloin desinfiointiaineen määrä on $0{,}4a$. Olkoon x liuoksen määrä veden lisäämisen jälkeen. Tulee olla $0{,}05x = 0{,}4a$ eli $x = 8a$. Lisätyn veden määrän on oltava $7a$. Sankoon on kaadettava liuosta $\frac{10\text{ l}}{8} = 1{,}25$ l.)

9. Järistyksen, jonka voimakkuus Richterin asteikolla on 6,9.
(Merkintä $\log_{10} E$ tarkoittaa luvun E 10-kantaista logaritmia $\lg E$.
Siis $\lg E = 11{,}8 + 15M$.
Jos $M = 6{,}8$, niin $\lg E = 11{,}8 + 1{,}5 \cdot 6{,}8$
eli $\lg E = 22$. Siis $E = 10^{22}$.
50 % suurempi energia on $1{,}5 \cdot 10^{22}$.
Yhtälöstä $\lg(1{,}5 \cdot 10^{22}) = 11{,}8 + 1{,}5M$
eli yhtälöstä $22{,}176 = 11{,}8 + 1{,}5M$
saadaan $M \approx 6{,}9$.)

10.

Perinnön verotettava arvo euroa	Vero alarajalla euroa	Vero alarajan ylittävästä osasta %
5 000–17 000	85	8
17 000–50 000	1 045	11
50 000–	4 675	16,5

Uusi vero on suurempi yli 262 000 euron perinnöstä.
(Veron määrän keskimmäisen luokan alarajalla tulee olla sama kuin alimman luokan ylärajalla eli $85 + 0{,}08 \cdot (17\,000 - 5\,000)$ euroa. Veron määrän ylimmän luokan alarajalla tullee olla sama kuin keskimmäisen luokan ylärajalla eli
$1\,045 + 0{,}11 \cdot (50\,000 - 17\,000)$ euroa.
Perintö, jonka vero suurenee, on ylimmässä veroluokassa.
Rajakohta ratkaistaan yhtälöllä
$4675 + 0{,}165(x - 50\,000)$
$= 5735 + 0{,}16(x - 50\,000)$.)

Sarja B

1. a) $x = \frac{2}{3}$ tai $x = -\frac{5}{3}$ (Voidaan käyttää tulon nollasääntöä: $(3x - 2)(3x + 5) = 0$, kun $3x - 2 = 0$ tai $3x + 5 = 0$.
Voidaan myös suorittaa kertolasku $(3x - 2)(3x + 5) = 9x^2 + 9x - 10$ ja ratkaista yhtälö $9x^2 + 9x - 10 = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.)

b) $-\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{-2 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{-2 + \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} : \left(-\frac{3}{2}\right)\right.$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = -\frac{1}{2}.$$

Laskuun on merkittävä oleelliset murtolukujen laskusääntöihin perustuvat välivaiheet. Laskun voi tarkistaa laskimen murtolukutoiminnoilla.)

2. a) 72 km/h (Ensimmäiseen 90 km:iin kului aikaa $\frac{90}{60}$ h = 1,5 h. Toiseen 90 km:iin kului aikaa 1 h. Koko matkaan kului aikaa 2,5 h, joten keskinopeus oli $\frac{180}{2{,}5}$ km/h.)

b) sievennetty muoto x^2, arvo $\frac{13}{49}$

$$\left(\frac{x^4 x^8}{(x^5)^2} = \frac{x^{12}}{x^{10}} = x^2,\ \left(\frac{\sqrt{13}}{7}\right)^2 = \frac{\sqrt{13}\sqrt{13}}{7 \cdot 7}\right)$$

3. 92 miesopiskelijaa ja 115 naisopiskelijaa
(Olkoon x miesopiskelijoiden määrä. Saadaan yhtälö $x + 1{,}25x = 207$.)

4. Pienenisi 38 %. Uudet osuudet:
lasi 4,4 %, metalli 12,3 %, muovi 19,0 %, paperi 51,9 % ja muut 12,4 %.
(Olkoon koko roskamäärä a. Tällöin roskapaperin määrä on $0{,}643a$ ja muovin määrä $0{,}177a$. Jos roskapaperin määrä vähenisi määrään $0{,}5 \cdot 0{,}643a = 0{,}3215a$ ja muovin määrä määrään $\frac{2}{3} \cdot 0{,}177a = 0{,}118a$, niin koko roskamäärä pienenisi määrällä $0{,}3215a + 0{,}059a = 0{,}3805a$, mikä on noin 38 % koko roskamäärästä. Uusi roskamäärä olisi $0{,}6195a$ ja uudet osuudet $\frac{0{,}027a}{0{,}6195a}$, $\frac{0{,}076a}{0{,}6195a}$, $\frac{0{,}118a}{0{,}6195a}$, $\frac{0{,}3215a}{0{,}6195a}$ ja $\frac{0{,}077a}{0{,}6195a}$.)

5. -2, -1, 0, 1, 2 ja 10, 11, 12, 13, 14.
Viisikoita on kaksi.
(Merkitään luvuista pienintä n, jolloin luvut ovat n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ ja $n + 4$.
Saadaan yhtälö $n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = (n + 3)^2 + (n + 4)^2$, joka sievenee muotoon $3n^2 + 6n + 5 = 2n^2 + 14n + 25$ ja edelleen muotoon $n^2 - 8n - 20 = 0$.)

6. $a = -12$

(Ratkaistaan yhtälö $\frac{3}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3 + a}{6}$.
Kun yhtälö kerrotaan luvulla 12, saadaan yhtälö $18 + 3a = 2(3 + a)$.)

7. 2,5 %:n vuotuinen kasvu, yli 20 000
20 vuoden kuluttua
(Jos väkiluku kasvaa joka vuosi yhtä monta prosenttia, se tulee joka vuosi kerrotuksi samalla luvulla k. Tulee olla
$k^8 \cdot 12\,300 = 15\,000$ eli

$$k = \sqrt[8]{\frac{15\,000}{12\,300}} \approx 1{,}0251.$$

Yhtälö $k^x \cdot 12\,300 = 20\,000$ toteutuu, kun

$$k^x \approx 1{,}626 \text{ eli kun } x \approx \frac{\lg 1{,}626}{\lg k} \approx 19{,}6.)$$

8. 945 km
(Pylväitä tarvitaan 201 kappaletta.
Lähimmän kolmen pylvään kuljetusmatka on $2 \cdot 2\,100$ m, seuraavan kolmen pylvään 300 m pitempi jne., joten kuljetusmatkat muodostavat aritmeettisen jonon.
Viimeinen kuljetusmatka on $2 \cdot 12\,000$ m.
Kuljetusmatkoja on 67.
Kuljetusmatkojen summa on

$$67 \cdot \frac{4\,200 + 24\,000}{2} = 944\,700 \text{ (m).)}$$

9. vuoden 2017
(Tilin säästösumma n. säästövuoden lopussa on geometrinen summa $1{,}025 \cdot 1000 + 1{,}025^2 \cdot 1000 + \ldots + 1{,}025^n \cdot 1000$.

Summan arvo on $\dfrac{1{,}025 \cdot 1000(1 - 1{,}025^n)}{1 - 1{,}025}$.

Yhtälö $\dfrac{1{,}025 \cdot 1000(1 - 1{,}025^n)}{-0{,}025} = 20\,000$

tulee muotoon $1{,}025^n \approx 1{,}488$, josta saadaan

$$n \approx \frac{\lg 1{,}488}{\lg 1{,}025} \approx 16{,}1.$$

Tilin arvo ylittää 20 000 euroa 17. säästövuoden eli vuoden 2017 lopussa.
Voidaan myös taulukoida säästösumma vuosi kerrallaan, kunnes 20 000 ylittyy.)

10. $k = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}059$, värähdysluvut
c 130, d 146, e 164, f 174, g 195, a 219, h 245, c^1 260
(d:n värähdysluku on $k^2 \cdot 130$, e:n värähdysluku $k^2 \cdot k^2 \cdot 130$, f:n värähdysluku $k \cdot k^2 \cdot k^2 \cdot 130$ jne. c^1:n värähdysluku on $k \cdot k^2 \cdot k^2 \cdot k^2 \cdot k \cdot k^2 \cdot k^2 \cdot 130 = k^{12} \cdot 130$.
Koska $k^{12} \cdot 130 = 260$, niin

$$k = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}0595.$$

d:n värähdysluku on $k^2 \cdot 130 \approx 146$,
e:n värähdysluku $k^4 \cdot 130 \approx 164$,
f:n värähdysluku $k^5 \cdot 130 \approx 174$ jne.
Värähdyslukuja laskiessa tulee käyttää mahdollisimman tarkkaa k:n likiarvoa: vähintään likiarvoa 1,05946 tai laskimeen tallennettua luvun $\sqrt[12]{2}$ likiarvoa.)

Tasogeometria

173. 310 km

174. 31 cm

(Jos alueen leveys on x, niin $\frac{x}{51} = \frac{51}{83}$.)

175. $2\frac{2}{3}$

(Jos x on sivun jatke, niin yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälö $\frac{x}{x+4} = \frac{2}{5}$. Vastaukseksi annetaan jatkeen pituuden tarkka arvo.)

176. 43 %

(Tölkkien vaipat ovat yhdenmuotoisia kuvioita, joten $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{7{,}8}{10{,}3}\right)^2 \approx 0{,}57 = 57\ \%$.)

177. 4,8 cm^2

(19 a = 1 900 m^2. Yhtälöstä $\frac{A}{1900\ \text{m}^2} = \frac{1}{2000^2}$ saadaan $A = 0{,}000475\ \text{m}^2$.)

178. $\sqrt{7}$

179. 13,1 m

(Jos x on taittuneen osan pituus, niin $x^2 = 4{,}2^2 + 7{,}8^2$.)

180. 24,9 cm^2

(Jos h on kolmion korkeus, niin $h^2 + 4{,}21^2 = 7{,}26^2$, josta $h \approx 5{,}91469$. Kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2} \cdot 8{,}42 \cdot h$.)

181. 23 km (Merkitään alkumatkaa x. Tällöin $x^2 + (2x)^2 = 17^2$, josta saadaan $5x^2 = 289$ ja $x = \sqrt{\frac{289}{5}} \approx 7{,}6026$ (km). Koko matka on $3x$.)

182. a) $\sqrt{34} \approx 5{,}8$ b) $\sqrt{61} \approx 7{,}8$

183. $10\frac{1}{2}$ (Kehykseksi piirretyn suorakulmion pinta-ala on $5 \cdot 5 = 25$. Tästä vähennetään kolmen suorakulmaisen kolmion pinta-alat $4\frac{1}{2}$, 5 ja 5.)

184. 1,7 m:n etäisyydellä ($\tan 68° = \frac{4{,}2}{x}$)

185. 8 100 metrin korkeudella

($\sin 78° = \frac{x}{8600}$)

186. 34,3° ($\cos \alpha = \frac{13{,}3}{16{,}1}$)

187. 37,9 cm ($\cos 68{,}1° = \frac{14{,}15}{x}$)

188. 50,8 cm^2 (Jos h on 19,0 cm:n sivulle piirretty korkeusjana, niin $\sin 28{,}5° = \frac{h}{11{,}2}$. Siis $h = 11{,}2 \sin 28{,}5° \approx 5{,}34418$ ja $A = \frac{1}{2} \cdot 19{,}0 \cdot h$.)

189. 71,57°
(Pisteen A kautta kulkeva x-akselin suuntainen suora jakaa kulman osiin α ja β, missä $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ ja $\tan\beta = 1$.)

190. 22 cm^2 (Suunnikkaan terävien kulmien suuruus on $180° - 123° = 57°$. Jos h on 6,3 cm:n sivulle piirretty korkeus, niin $\sin 57° = \frac{h}{4{,}2}$. Tällöin $A = 6{,}3h$.)

191. korkeus 12 cm ja pinta-ala 300 cm^2
(Kun lyhyemmän yhdensuuntaisen sivun päistä piirretään kohtisuorat pitemmälle sivulle, muodostuu kaksi samanlaista suorakulmaista kolmiota, joiden hypotenuusa on 13, toinen kateetti
$(30 \text{ cm} - 20 \text{ cm}) : 2 = 5$ cm ja toinen kateetti korkeus h. Korkeus ratkaistaan Pythagoraan lauseella.)

192. 135° (Voidaan käyttää tietoa, että n-kulmion kulmien summa on $(n - 2) \cdot 180°$. Voidaan myös tutkia tasakylkisiä kolmioita, jotka muodostuvat, kun kärjet yhdistetään keskipisteeseen. Kolmioiden huippukulma on 45°, ja kahdeksankulmion kulma muodostuu kahdesta kantakulmasta.)

193. 6,2574 (Kun kärjet yhdistetään keskipisteeseen, muodostuu 20 samanlaista tasakylkistä kolmiota. Yhden kolmion kannan pituus on $2 \sin 9°$.)

194. ulkopuolella (Pisteen etäisyys origosta on $\sqrt{65} \approx 8{,}06$. Etäisyys on suurempi kuin ympyrän säde.)

195. 12 cm (Koska $\frac{\pi r^2}{2} = 8{,}6$, niin $r = \sqrt{\frac{17{,}2}{\pi}} \approx 2{,}3399$ (m).
Piiri on $2r + \pi r$.)

196. 8 900 km ($\frac{80°}{360°} \cdot 40\,000$ km)

197. 107,7°
(Voidaan ratkaista verrantoyhtälö $\frac{\alpha}{360°} = \frac{8{,}89}{\pi \cdot 9{,}46}$ tai yhtälö $\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot 9{,}46 = 8{,}89$.)

198. etäisyys keskipisteestä 12,0 cm, kaaren pituus 10,3 cm
(Tutkitaan jänteen ja sen päätepisteisiin piirrettyjen säteiden muodostamaa tasakylkistä kolmiota. Etäisyys on kolmion korkeus, joten $x^2 + 5^2 = 13^2$. Keskuskulman puolikkaalle α on $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, josta $\alpha \approx 22{,}6199°$. Kaaren pituus on $b = \frac{2\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 13$.)

199. 15 km:n päähän (Etäisin kohta on piste, jossa katsojan silmien kautta kulkeva maapallon poikkileikkausympyrän tangentti sivuaa ympyrää. Pythagoraan lauseella saadaan $x^2 + 6370^2 = 6370{,}018^2$.)

200. 122°:n kulmassa (Näkökulma on aluksesta maapallon poikkileikkausympyrälle piirrettyjen tangenttien välinen kulma. Kulma on 2α, missä $\sin\alpha = \frac{6370}{6370 + 930}$.)

201. 26,3 metrin etäisyydeltä
(Olkoon x (cm) etäisyys koripallon keskipisteestä. Tulee olla $\sin 0{,}262° = \frac{12{,}1}{x}$. Etäisyydestä x vähennetään koripallon säde.)

202. 270 km:n päähän
(Kaaren pituus on $\frac{\alpha}{360°} \cdot 40\,000$ km, missä α on kulma, jolle $\cos\alpha = \frac{6370}{6370 + 5{,}7}$.)

203. 1,9°
(Valo on 152 m = 0,152 km järven pintaa korkeammalla. Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan $\tan\alpha = \frac{0{,}152}{4{,}5}$.)

204. 140 cm
(Kankaan leveyden on oltava suurempi kuin ulomman ympyrän halkaisija.
Sisemmän ympyrän halkaisija on
$d = \frac{60}{\pi} \approx 19{,}1$ cm.
Ulomman ympyrän halkaisija on
$d + 2 \cdot 60 \approx 139{,}1$ (cm).
Vastaus on pyöristetty ylöspäin, jotta kangas varmasti riittää.)

205. 5,3 m, lyhenee 2,3 m
(Olkoon x (m) varjon korkeus silloin, kun henkilö on 4,0 m:n etäisyydellä valonheittimestä. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan $\frac{x}{1{,}75} = \frac{12}{4{,}0}$, josta $x = 5{,}25$ m.
Kahdessa sekunnissa henkilö etenee
$\frac{2}{60} \cdot 95$ m $\approx 3{,}167$ m.
Varjon korkeus y saadaan yhtälöstä
$\frac{y}{1{,}75} = \frac{12}{7{,}167}$, josta $y \approx 2{,}930$ m.
Varjo lyhenee 5,25 m – 2,930 m ≈ 2,3 m.)

206. Koko 11,6 ha, maksimivirhe 0,4 ha
(Jos A on palstan koko neliösenttimetreinä, $\frac{2{,}9 \text{ cm}^2}{A} = \left(\frac{1}{20\,000}\right)^2$, joten
$A = 20\,000^2 \cdot 2{,}9 \text{ cm}^2 = 1\,160\,000\,000 \text{ cm}^2$
$= 116\,000 \text{ m}^2 = 11{,}6$ ha. Maksimivirhe on
$20\,000^2 \cdot 0{,}1 \text{ cm}^2 = 40\,000\,000 \text{ cm}^2$
$= 4\,000 \text{ m}^2 = 0{,}4$ ha. Voidaan myös käyttää kymmenpotenssimuotoa
$A = 1{,}16 \cdot 10^9 \text{ cm}^2$, josta päästään hehtaareihin jakamalla 10^8:lla, sillä
1 ha = 10 000 m^2 = 10 000 · 10 000 cm^2
$= 10^8$ cm^2.)

207. pituus 34,57 m, kulma 173°
(Vaijerin kiinnityskohtia yhdistävä jana (pituus 34,50 m) ja vaijerin puolikkaat muodostavat tasakylkisen kolmion, jonka korkeus on 1,10 m. Jos x on vaijerin puolikkaan pituus, niin $x^2 = 17{,}25^2 + 1{,}10^2$, josta $x \approx 17{,}285$ (m). Vaijerin pituus on $2x$. Jos α on vaijerien puoliskojen välisen kulman puolikas (kolmion huippukulman puolikas), niin $\tan\alpha = \frac{17{,}25}{1{,}10}$.)

208. a) $\sqrt{8}$ b) 8 c) 4

(Neliön sivu AD on suorakulmaisen kolmion AED kateetti. Jos a on sivun pituus, niin $a^2 + 1^2 = 3^2$, joten $a^2 = 8$ ja $a = \sqrt{8}$ (tarkka arvo.).

Neliön pinta-ala on $(\sqrt{8})^2 = 8$.

Lävistäjän pituus x saadaan Pythagoraan lauseella:

$x^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2$ eli $x^2 = 16$.

Laskuissa ei saa käyttää sivun pituuden likiarvoa.)

209. 74,2°, 60,5° ja 45,3° (Pisteen C kautta kulkeva x-akselin suuntainen suora leikkaa sivun AB pisteessä $(-2, \sqrt{2})$ ja jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Kolmion kulma A $(= \alpha)$ saadaan ylemmästä kolmiosta: $\tan\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$, joten $\alpha \approx 74{,}21°$. Kolmion kulma B $(= \beta)$ saadaan alemmasta kolmiosta: $\tan\beta = \dfrac{5}{2\sqrt{2}}$, josta $\beta \approx 60{,}50°$. Kolmion kolmas kulma on $180° - \alpha - \beta$.)

210. syvyydellä 53,3 km, 7,4°:n kulmassa

(Helsingin ja Brysselin etäisyys on maapallon poikkileikkausympyrän kaaren pituus. Lasketaan säteiden ja jänteen muodostaman tasakylkisen kolmion korkeus ja vähennetään korkeus ympyrän säteestä. Kaaren keskuskulma $\alpha \approx 14{,}84°$ saadaan verrannosta $\dfrac{\alpha}{360°} = \dfrac{1\,650}{2\pi \cdot 6\,370}$ tai yhtälöstä $\dfrac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6370 = 1\,650$.

Tasakylkisen kolmion korkeudelle x on $\cos 7{,}42° = \dfrac{x}{6\,370}$, joten

$x = 6370 \cdot \cos 7{,}42° \approx 6316{,}7$.

Siis suurin syvyys on

6 370 km – 6 316,7 km.

Kaltevuuskulma on Helsinkiin piirretyn ympyrän tangentin ja tunnelin välinen kulma. Kulma on yhtä suuri kuin $90° - \beta$, missä β on tasakylkisen kolmion kantakulma. Kaltevuuskulma on siten yhtä suuri kuin huippukulman puolikas 7,42°.)

211. a) 250 km

b) vähintään 5,1 kilometrin korkeudella

(Merkintä $60°9'$ tarkoittaa 60 astetta ja 9 kulmaminuuttia, missä kulmaminuutti on asteen kuudeskymmenesosa.

Koska $\frac{9}{60} = 0{,}15$, niin $60°9' = 60{,}15°$.

Vastaavasti $62°26' \approx 62{,}4333°$.

Koska Helsinki ja Moisio ovat samalla pituuspiirillä, ne ovat samalla maapallon isoympyrällä (kehän pituus 40 000 km). Paikkakuntiin piirrettyjen säteiden välinen kulma on $62{,}4333° - 60{,}15° = 2{,}2833°$, joten paikkakuntien etäisyys on

$\frac{2{,}2833°}{360°} \cdot 40\,000$ km.

b-kohdassa tutkitaan kolmiota, jonka muodostavat Helsinkiin piirretty säde, Helsinkiin piirretty ympyrän tangentti ja Moisioon piirretty säde jatkeineen. Kolmion hypotenuusa saadaan yhtälöstä

$\cos 2{,}2833° = \frac{r}{x}$, missä $r = \frac{40\,000}{2\pi}$ on maapallon säde. Kysytty vähimmäiskorkeus on $x - r$.)

212. 69 mm

(Poikkileikkausympyrässä etiketti on ympyrän kaari. Koska tölkki etäältä katsottuna näyttää neliöltä, niin kaaren päätepisteitä yhdistävän jänteen pituus on 60 mm. Jos α on kaaren keskuskulman puolikas, niin

$\sin\alpha = \frac{30}{r}$, missä $r = \frac{240}{2\pi} \approx 38{,}1972$ (mm)

on ympyrän säde. Ratkaistaan α, jolloin kaaren pituus on $\frac{2\alpha}{360°} \cdot 240$ mm.)

213. $AB = 10{,}4$ cm, $CD = 2{,}3$ cm

(Jana AB on suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusa. Merkitään $CD = x$. Tällöin suorakulmaisessa kolmiossa BCD on $DB = DA = 8{,}6 - x$. Pythagoraan lauseesta saadaan yhtälö $x^2 + 5{,}8^2 = (8{,}6 - x)^2$ eli $x^2 + 5{,}8^2 = 8{,}6^2 - 17{,}2x + x^2$.)

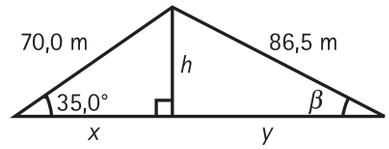
214. 3,05 m

(Tutkitaan tangon vedenalaisten osien pituutta. Pystysuoran tangon vedenalainen osa (lammikon syvyys), taittuneen tangon vedenalainen osa ja lammen säde muodostavat suorakulmaisen kolmion. Olkoon x pystysuoran tangon vedenalaisen osan pituus metreinä. Taittuneen tangon vedenalainen osa on $1{,}83 \text{ m} - 0{,}76 \text{ m} = 1{,}07$ m pitempi eli $x + 1{,}07$ (m). Lammen säde on $\frac{17{,}40}{2\pi} \approx 2{,}769$ (m). Pythagoraan lauseesta saadaan yhtälö $x^2 + 2{,}769^2 = (x + 1{,}07)^2$ eli yhtälö

$x^2 + 2{,}769^2 = x^2 + 2{,}14x + 1{,}1449$.)

215. muut kulmat $27{,}7°$ ja $117{,}3°$,

pinta-ala 2 690 m^2



($\sin 35{,}0° = \frac{h}{70{,}0}$, joten

$h = 70{,}0 \cdot \sin 35{,}0° \approx 40{,}1504$ (m).

$\sin\beta = \frac{h}{86{,}5}$, joten $\beta \approx 27{,}656°$. Kolmas kulma on $180° - 35{,}0° - 27{,}7°$. Kolmannen sivun osat x ja y saadaan yhtälöistä

$\cos 35{,}0° = \frac{x}{70{,}0}$ ja $\cos\beta = \frac{y}{86{,}5}$.

Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}(x + y)h$.)

216. Piiri $24 \sin 15° \, r \approx 6{,}21166r$, π:n arvo saadaan kahden numeron tarkkuudella.
(Kun monikulmion kärjet yhdistetään ympyrän keskipisteeseen, muodostuu 12 samanlaista tasakylkistä kolmiota, joiden jokaisen huippukulma on $\frac{360°}{12} = 30°$.

Jos x on kolmion kannan puolikas, niin $\sin 15° = \frac{x}{r}$, joten $x = r \sin 15° = \sin 15° \, r$.

Yhden kolmion kanta on $2 \sin 15° \, r$ ja 12-kulmion piiri $24 \sin 15° \, r \approx 6{,}21166r$.
Koska ympyrän kehän pituus on $2\pi r$, niin luvulle π saadaan arvio
$12 \sin 15° = 3{,}1058...$.
Luku $\pi = 3{,}141...$ saatiin lasketuksi kahden numeron tarkkuudella.)

217. etäisyys 500 m, majakan korkeus 26 m
(Olkoon x (m) etäisyys majakasta. Majakan korkeus h voidaan ilmaista x:n avulla kahdella tavalla: $\tan 3° = \frac{h}{x}$, josta

$h = x \tan 3°$ ja toisaalta $\tan 2° = \frac{h}{x + 250}$,

josta $h = (x + 250) \tan 2°$. Siis
$x \tan 3° = (x + 250) \tan 2°$. Yhtälöstä saadaan $x = \frac{250 \tan 2°}{\tan 3° - \tan 2°} \approx 499{,}2$ (m) ja edelleen $h = x \tan 3°$.
Laskuissa voidaan käyttää myös lukujen $\tan 3°$ ja $\tan 2°$ likiarvoja.)

218. 8,1 m (Olkoon h tikkaiden yläpään korkeus seinällä alkutilanteessa ja y tikkaiden pituus. Tällöin $h^2 + 2{,}8^2 = y^2$ ja
$(h - 1{,}0)^2 + 4{,}7^2 = y^2$. Saadaan yhtälö
$h^2 + 2{,}8^2 = (h - 1{,}0)^2 + 4{,}7^2$ eli yhtälö
$h^2 + 2{,}8^2 = h^2 - 2h + 1{,}0^2 + 4{,}7^2$, josta
$h = 7{,}625$ (m). Siis $y^2 = 7{,}625^2 + 2{,}8^2$.)

Avaruusgeometria

219. 900 l ($V = 250 \cdot 121 \cdot 0{,}03$ dm^3)

220. 16,2 m^3
(Huoneen tilavuus ennen peruskorjausta on
$5{,}20 \cdot 4{,}25 \cdot 3{,}65 = 80{,}665$ (m^3) ja peruskorjauksen jälkeen
$5{,}05 \cdot 3{,}95 \cdot 3{,}23 \approx 64{,}430$ (m^3).)

221. pituus 79 cm, leveys 48 cm ja korkeus 32 cm
(Merkitään mittoja desimetreinä $5x$, $3x$ ja $2x$. Koska 120 l = 120 dm^3, saadaan yhtälö
$5x \cdot 3x \cdot 2x = 120$ ja edelleen $x^3 = 4$.
Mitat desimetreinä ovat
$5 \cdot \sqrt[3]{4}$, $3 \cdot \sqrt[3]{4}$ ja $2 \cdot \sqrt[3]{4}$.)

222. 2,70 cm^3
(Jos pohjasärmän pituus on x (cm), niin korkeus on $2x$. Koko pinnan ala on
$2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot 2x = 10x^2$.
Yhtälöstä $10x^2 = 12{,}2$ saadaan
$x = \sqrt{1{,}22} = 1{,}10454$ (cm).
Särmiön tilavuus on $V = x \cdot x \cdot 2x = 2x^3$.)

223. enintään 97 cm pitkä (särmiön avaruuslävistäjän pituus)

224. 10,8 m^2
(Huoneen seinäpinta-ala ennen peruskorjausta on
$(2 \cdot 5{,}20 + 2 \cdot 4{,}25) \cdot 3{,}65 = 68{,}985$ (m^2)
ja peruskorjauksen jälkeen
$(2 \cdot 5{,}05 + 2 \cdot 3{,}95) \cdot 3{,}23 = 58{,}14$ (m^2).)

225. 2 100 l

($2{,}6\ \text{a} = 260\ \text{m}^2 = 26\,000\ \text{dm}^2$. Vesimäärän tilavuus on $V = 26\,000 \cdot 0{,}081\ \text{dm}^3$.)

226. 2,7 dl

($V = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 7{,}0\ \text{cm}^3 \approx 270\ \text{cm}^3$)

227. 7,8 cm

($3{,}5\ \text{l} = 3{,}5\ \text{dm}^3 = 3500\ \text{cm}^3$. Lieriön korkeus $h = \frac{V}{A} = \frac{3\,500}{450}$ (cm).)

228. pohjan pinta-ala $200\ \text{cm}^2$, pohjan säde 8,0 cm, vaipan pinta-ala $501\ \text{cm}^2$

(Lieriön tilavuus on $V = 2\ \text{l} = 2\ \text{dm}^3 = 2\,000\ \text{cm}^3$.

Pohjan pinta-ala on $A = \frac{V}{h} = \frac{2\,000}{10{,}0}$ (cm^2).

Jos r (cm) on pohjan säde, niin $\pi r^2 = 200$, joten $r = \sqrt{\frac{200}{\pi}} \approx 7{,}9788$ (cm).

Vaipan pinta-ala on pohjan piirin ja korkeuden tulo $2\pi r \cdot 10{,}0$ (cm^2).)

229. 18 m^2

(Jos A (m^2) on peittynyt maa-ala, niin $\frac{1}{3}A \cdot 2{,}8 = 17$ eli $2{,}8A = 51$.)

230. tilavuus $146\ \text{cm}^3$, vaipan pinta-ala $120\ \text{cm}^2$

(Kartion pohjan säde on $r = 4{,}1$ cm ja kartion tilavuus $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4{,}1^2 \cdot 8{,}3$ (cm^3).

Kartion sivujana s saadaan Pythagoraan lauseella: $s^2 = 8{,}3^2 + 4{,}1^2$, josta $s \approx 9{,}2574$ (cm). Vaipan pinta-ala on $A = \pi r s$.)

231. korkeus 4,0 m ja tilavuus $48\ \text{m}^3$

(Jos h on pyramidin korkeus, niin $h^2 + 3{,}0^2 = 5{,}0^2$, joten $h = 4{,}0$ (m).

Tilavuus $V = \frac{1}{3} \cdot 6{,}0^2 \cdot 4{,}0$.)

232. 98 m^2

(Katto muodostuu neljästä samanlaisesta tasakylkisestä kolmiosta, joiden kannan pituus on 9,70 m. Lappeiden kaltevuuskulma on vaippakolmion korkeusjanan s ja pyramidin pohjan välinen kulma. Suorakulmaisessa kolmiossa, jonka hypotenuusa on s ja toinen kateetti pyramidin korkeusjana, toisen kateetin pituus on pohjasärmän puolikas. Siis $\cos 17° = \frac{4{,}85}{s}$,

josta $s = \frac{4{,}85}{\cos 17°} \approx 5{,}0716$ (m).

Katon pinta-ala on $A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}70 \cdot s$.)

233. 502 kg (Ilmapallon tilavuus on $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4{,}53^3 \approx 389{,}390$ (m^3).

Pallossa olevan ilman paino on $389{,}390 \cdot 1{,}29$ kg.)

234. 2,25 m (Yhtälöstä $\frac{4}{3}\pi r^3 = 6{,}00$ saadaan pallon säde $r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 6{,}00}{4\pi}} \approx 1{,}1273$ (m).

Läpimitta on $2r$.)

235. 1 030 km

(Yhtälöstä $4\pi r^2 = 338\,000$ saadaan pikkuplaneetan säde

$r = \sqrt{\frac{338\,000}{4\pi}} \approx 164{,}00$ (km).

Planeetan ympärysmitta on $p = 2\pi r$.)

236. 15 900 km

(Maapallon poikkileikkausympyrään piirretyssä suorakulmaisessa kolmiossa, jonka hypotenuusa on maapallon keskipisteestä napapiirille piirretty maapallon säde, leveyspiirin säde r on kulman $90° - 66{,}6° = 23{,}4°$ vastainen kateetti. Siis

$\sin 23{,}4° = \dfrac{r}{6\,370}$, joten

$r = 6\,370 \sin 23{,}4° \approx 2\,529{,}83$ (km).

Napapiirin pituus on $2\pi r$.)

237. Voidaan. (Hautakiven paino on $0{,}8 \cdot 2{,}10 \cdot 0{,}32 \cdot 2\,700$ kg $\approx 1\,500$ kg eli vähemmän kuin 2 t $= 2\,000$ kg.)

238. 12 henkeä/km^2 ja 43 henkeä/km^2

(Jos väestö jakautuu tasaisesti, niin väestön tiheys on $\dfrac{6\,300\,000\,000}{4 \cdot \pi \cdot 6\,370^2}$ henkeä/km^2.

Jos otetaan huomioon vain maapinta-ala, tiheys on $\dfrac{6\,300\,000\,000}{0{,}29 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 6\,370^2}$.

Väkiluku voidaan ilmaista ja näppäillä laskimeen myös kymmenpotenssimuodossa: 6,3 miljardia $= 6{,}3 \cdot 10^9$.)

239. 89 cm

(Öljyn pinta on korkeudella $h = \dfrac{V}{A}$, missä $V = 120$ dm^3 ja $A = \pi \cdot 3{,}5^2$ dm^2 on lieriön pohjan pinta-ala.

Saadaan $h \approx 3{,}1$ dm $= 31$ cm.

Tyhjän tilan korkeus on 120 cm $- 31$ cm.)

240. leveys 43,1 cm, pituus 21,5 cm ja korkeus 64,6 cm

(Veistoksen tilavuus on 6,00 m^3. Pienoismallin leveyden, pituuden ja korkeuden suhde on $2 : 1 : 3$. Jos pituus on x (m), saadaan yhtälö $2x \cdot x \cdot 3x = 0{,}06$ eli $6x^3 = 0{,}06$. Siis

pituus $x = \sqrt[3]{0{,}01} \approx 0{,}21544$ (m),

leveys $2x = 2\sqrt[3]{0{,}01} \approx 0{,}431$ (m) ja

korkeus $3x = 3\sqrt[3]{0{,}01} \approx 0{,}646$ (m).)

241. 30 cm korkea on suurempi.

Tilavuuksien suhde on 1,3.

(Jos lieriön korkeus on 40 cm, niin lieriön pohjan säde on $r = \dfrac{30}{2\pi} \approx 4{,}7746$ (cm) ja tilavuus $\pi r^2 \cdot 40 \approx 2\,865$ (cm^3).

Jos lieriön korkeus on 30 cm, niin lieriön pohjan säde on $r = \dfrac{40}{2\pi} \approx 6{,}3662$ (cm) ja tilavuus $\pi r^2 \cdot 30 \approx 3\,820$ (cm^3).

Siis jälkimmäinen lieriö on suurempi ja tilavuuksien suhde on $\dfrac{3\,820}{2\,865} \approx 1{,}3$.)

242. 99 kg

(Olkoon r (dm) säiliön sisäsäde.

Tällöin $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = 200$ ja

$r = \sqrt[3]{\dfrac{600}{4\pi}} \approx 3{,}62783$ (dm).

Säiliön seinämän tilavuus on

$V = \dfrac{4}{3}\pi(r + 0{,}075)^3 - 200 \approx 12{,}662$ (dm^3)

ja massa $12{,}662 \cdot 7{,}8$ kg.)

243. 9,0 mm

(Kun suppilon yläpohjaympyrälle sataa millimetrin korkuinen kerros vettä, vesimäärän tilavuus on
$V = \pi \cdot 6{,}6^2 \cdot 0{,}1 \text{ cm}^3 \approx 13{,}685 \text{ cm}^3$.
Tästä kertyy alaosaan lieriön muotoinen vesikerros, jonka korkeus on $h = \frac{V}{A}$, missä $A = \pi \cdot 2{,}2^2 \text{ cm}^2 \approx 15{,}205 \text{ cm}^2$ on lieriön pohjan pinta-ala.)

244. sivusärmän pituus 29, 46,4°:een kulman

(Olkoon x pohjan lävistäjän pituus. Tällöin $x^2 = (20\sqrt{2})^2 + (20\sqrt{2})^2$ eli (laskimella ilman likiarvoja) $x^2 = 1\,600$, joten $x = 40$. Olkoon y sivusärmän pituus. Tällöin $y^2 = 21^2 + 20^2$, joten $y = 29$. Sivusärmän ja pohjan välinen kulma on sivusärmän ja pohjan lävistäjän välinen kulma, joten $\cos\alpha = \frac{20}{29}$ (tai $\tan\alpha = \frac{21}{20}$).)

245. 88 cm^3

(Vaippakolmiosta ratkaistaan kolmion korkeus $s = 7{,}6 \cdot \cos 26° \approx 6{,}8308$ (cm) ja kannan (pyramidin pohjasärmän) puolikas $x = 7{,}6 \cdot \sin 26° \approx 3{,}3316$ (cm). Jos h on pyramidin korkeus, niin $h^2 + x^2 = s^2$, joten $h^2 = s^2 - x^2$ ja $h \approx 5{,}963$ (cm).
Pyramidin tilavuus on $V = \frac{1}{3} \cdot (2x)^2 \cdot h$.)

246. 26 minuuttia

(Jos p (km) on koko 63°:een leveyspiirin pituus, niin paikkakuntien aikaero on $\frac{330}{p} \cdot 24$ h. Leveyspiirin säde r on 27°:een kulman vastainen kateetti suorakulmaisessa kolmiossa, jonka hypotenuusa on maapallon säde. Siis
$\sin 27° = \frac{r}{6\,360}$, joten
$r = 6360 \sin 27° \approx 2\,887$ (km). Leveyspiirin pituus on $p = 2\pi r \approx 18\,140$ (km). Aikaero on $\frac{330}{18\,140} \cdot 24 \text{ h} \approx 0{,}437 \text{ h} \approx 26 \text{ min}$.)

247. 760 l

(Öljy muodostaa lieriön, jonka pohja on pääty-ympyrän segmentti ja korkeus $h = 3{,}56 \text{ m} = 35{,}6 \text{ dm}$. Pääty-ympyrän säde on 8,1 dm. Segmentin pinta-ala saadaan vähentämällä sektorin pinta-alasta tasakylkisen kolmion pinta-ala.
Tasakylkisen kolmion korkeus on
8,1 dm – 2,6 dm = 5,5 dm.
Sektorin keskuskulman puolikkaalle α on $\cos\alpha = \frac{5{,}5}{8{,}1}$, josta $\alpha \approx 47{,}2335°$, joten sektorin pinta-ala
$A_S = \frac{2\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot 8{,}1^2 \approx 54{,}088$ (dm^2).
Tasakylkisen kolmion kannan puolikkaalle x on $x^2 + 5{,}5^2 = 8{,}1^2$, josta
$x = \sqrt{35{,}36} \approx 5{,}9464$ (dm).
Tasakylkisen kolmion pinta-ala on
$A_K = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 5{,}5 \approx 32{,}705$ (dm^2).
Segmentin pinta-ala on
$A = A_S - A_K \approx 21{,}383$ dm^2
ja öljyn tilavuus $V = Ah$.)

248. 6,2 mm

(Pallon syrjäyttämän vesimäärän massa on 47 kg, joten vesimäärän tilavuus on $47\ \text{dm}^3$. Pallon tilavuus on siis $V_1 = 2 \cdot 47\ \text{dm}^3 = 94\ \text{dm}^3$.

Poijun rautaisen seinämän tilavuus on $\frac{47}{7{,}7}\ \text{dm}^3 \approx 6{,}10390\ \text{dm}^3$. Pallon sisältä on siis poistettu pallo, jonka tilavuus on $V_2 \approx 94\ \text{dm}^3 - 6{,}10390\ \text{dm}^3 = 87{,}8961\ \text{dm}^3$.

Olkoon r_1 (dm) koko pallon säde ja r_2 poistetun pallon säde. Koska $\frac{4}{3}\pi {r_1}^3 = V_1$, niin $r_1 = \sqrt[3]{\frac{3V_1}{4\pi}} \approx 2{,}82063$ (dm).

Vastaavasti $r_2 = \sqrt[3]{\frac{3V_2}{4\pi}} \approx 2{,}75821$ (dm).

Seinämän paksuus on $r_1 - r_2$.)

Sarja C

1. Luku $-\frac{5}{3}$ on molempien yhtälöiden ratkaisu.

(Kun yhtälö $\frac{3}{5}x + 2 = 1$ kerrotaan luvulla 5, saadaan yhtälö $3x + 10 = 5$.

Yhtälö $3x^2 - 7x - 20 = 0$ ratkaistaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.)

2. a) $25°$, $55°$ ja $100°$

(Voidaan muodostaa yhtälö $5x + 11x + 20x = 180°$, jolloin $x = 5°$.)

b) $4\frac{1}{2}$, 6 ja $7\frac{1}{2}$

(Merkitään sivuja $3x$, $4x$ ja $5x$. Suorakulmaisen kolmion pinta-ala on puolet kateettien pituuksien tulosta. Yhtälöstä $\frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4x = 13\frac{1}{2}$ saadaan $x^2 = \frac{9}{4}$, joten $x = \frac{3}{2}$.)

3. 20 000 planeetan vuotta

(Planeetan vuosi on $\frac{3 \cdot 10^7}{60}\ \text{min} = 500\,000\ \text{min}$, ja vettä haihtuu minuutissa $100\ \text{l} = 100\ \text{dm}^3 = 0{,}1\ \text{m}^3$, joten planeetan vuodessa haihtuu $50\,000\ \text{m}^3$. Säiliön tilavuus on $V = \pi \cdot 1000^2 \cdot 320\ \text{m}^3$, ja kulunut aika planeetan vuosina on $\frac{V}{50\,000}$.)

4. 13 % (Kuiva-aineen määrä on $0{,}55 \cdot 1\,300\ \text{kg} = 715\ \text{kg}$. Kuivatuissa halloissa on vettä $820\ \text{kg} - 715\ \text{kg} = 105\ \text{kg}$.

Vesipitoisuus on $\frac{105}{820} \approx 0{,}13 = 13\ \%$.)

5. 5,0 km:n korkeudella, paikan etäisyys oli 10,8 km.
(Suoraviivainen etäisyys salamaniskusta oli $35 \cdot 340\ \text{m} = 11\,900\ \text{m} = 11{,}9\ \text{km}$.
Jos x on korkeus, jolla salamanisku tapahtui, niin $\sin 25° = \frac{x}{11{,}9}$.
Jos y on etäisyys paikasta, jonka yläpuolella salama iski, niin $\cos 25° = \frac{y}{11{,}9}$.)

6. a) Laskenut 14 %. (Olkoon a osakkeiden ostohinta. Osakkeiden arvo laski ensin arvoon $0{,}80a$ ja nousi sitten arvoon $1{,}07 \cdot 0{,}80a = 0{,}856a$. Arvo $0{,}856a$ on 14,4 % ≈ 14 % alkuperäistä arvoa pienempi.)
b) 6 250 € (Tappio oli $0{,}144a$. Ratkaistaan yhtälö $0{,}144a = 900$.)
c) 17 % ($\frac{a}{0{,}856a} = \frac{1}{0{,}856} \approx 1{,}17$ = 117 %)

7. summa $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 3^n$, ylittää miljoonan n:n arvosta 14 alkaen
(Jonon peräkkäisten termien suhde
$q = 1\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 3$.
Jonon n ensimmäisen termin summa on

$$\frac{\frac{1}{2}(1 - 3^n)}{1 - 3} = \frac{\frac{1}{2}(1 - 3^n)}{-2}$$

$$= -\frac{1}{4}(1 - 3^n) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 3^n.$$

Yhtälö $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 3^n = 1\,000\,000$ tulee muotoon $-1 + 3^n = 4\,000\,000$ ja edelleen $3^n = 4\,000\,001$, josta

$$n = \frac{\lg 4\,000\,001}{\lg 3} \approx 13{,}84.$$

Koska yhteenlaskettavien määrän lisääntyessä summan arvo suurenee, summa ylittää miljoonan n:n arvosta 14 alkaen.
Laskuissa voidaan käyttää myös desimaalimuotoa $\frac{1}{2} = 0{,}5$.)

8. pohjapinta-ala 6,96 m^2, tilavuus 4,59 m^3
(Jos x on pohjan lävistäjän puolikas, niin $x^2 + 1{,}98^2 = 2{,}72^2$, joten $x^2 = 3{,}478$.
Jos a on pohjaneliön sivun pituus, niin $a^2 = x^2 + x^2$. Pohjan pinta-ala on a^2 ja teltan tilavuus $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot 1{,}98$.)

9. viikon kuluttua 19 %, neljän viikon kuluttua 2,1 %

(Pakkasnesteen määrä maanantaina oli $0{,}4 \cdot 10\ \text{l} = 4{,}0\ \text{l}$. Pakkasnesteen määrä vähenee joka päivä 10 % eli tulee 0,90-kertaiseksi. Kun auto viedään korjaamoon, pakkasnesteen määrä on $0{,}90^7 \cdot 4{,}0\ \text{l} \approx 1{,}9\ \text{l}$, joten pakkasnestepitoisuus on

$\frac{1{,}9}{10} = 0{,}19 = 19\ \%$.

Neljän viikon kuluttua pakkasnesteen määrä olisi $0{,}90^{28} \cdot 4{,}0\ \text{l} \approx 0{,}21\ \text{l}$.)

10. arvo 1 941,27 €, 49,3 % suurempi

(Osakesalkkuun ostettujen rahasto-osuuksien määrä on $\frac{100}{20} + \frac{100}{18} + \ldots + \frac{100}{10} + \frac{100}{8} + \frac{100}{10} + \ldots + \frac{100}{18} + \frac{100}{20} \approx 97{,}0635$ ja loppuarvo $97{,}0635 \cdot 20\ € = 1\,941{,}27\ €$.
Ostoja tehtiin 13 kertaa, joten sijoitettu summa oli $13 \cdot 100\ € = 1\,300\ €$.

Koska $\frac{1\,941{,}27}{1\,300} \approx 1{,}493$, ensimmäinen tapa tuotti 49,3 % suuremman loppuarvon.)

Sarja D

1. a) $x = -1$ tai $x = \frac{2}{3}$ (Kun suoritetaan kertolasku, yhtälö tulee muotoon
$3x^2 + 2x - 1 = x + 1$ ja edelleen muotoon
$3x^2 + x - 2 = 0$.)

b) $a = \frac{1}{6}$ (Tulee olla

$a \cdot (-6)^2 + \frac{1}{3} \cdot (-6) - 4 = 0$ eli

$36a - 2 - 4 = 0$.)

2. Vastaa todellisuudessa halkaisijaa 360 m, tulisi olla 0,13 mm.

(Jos x on risteysalueen todellinen halkaisija, niin $\frac{1{,}8\ \text{mm}}{x} = \frac{1}{200\,000}$, josta

$x = 200\,000 \cdot 1{,}8\ \text{mm} = 360\,000\ \text{mm}$
$= 360\ \text{m}$.

Jos y on kartalle oikein piirretty halkaisija metreinä, niin $\frac{y}{25\ \text{m}} = \frac{1}{200\,000}$, josta

$y = 0{,}000125\ \text{m} = 0{,}125\ \text{mm} \approx 0{,}13\ \text{mm}$.)

3. Laskeneet 1,6 %.

(Palkan reaaliarvo (ostovoima) pysyy samana, jos palkka muuttuu samassa suhteessa kuin kuluttajahintaindeksi. Kahden vuoden takaista palkkaa 1 782 € vastaava palkka x ratkaistaan yhtälöllä $\frac{x}{1\,782} = \frac{116{,}9}{104{,}7}$,

josta $x \approx 1\,989{,}6$ (€).

Koska $\frac{1\,958}{1\,989{,}6} \approx 0{,}984 = 98{,}4\ \%$,

palkan reaaliarvo on laskenut 1,6 %.)

4. pinta-ala 0,96 ha, neliömetrihinta 1,04 €/m^2

(Neljäkkään korkeus h saadaan yhtälöstä

$\sin 81° = \frac{h}{98{,}5}$ ja

$A = 98{,}5\text{h} \approx 9583\ \text{m}^2 \approx 0{,}96\ \text{ha}$. Neliömetrihinta on $\frac{10\,000}{9\,583}\ €/\text{m}^2 \approx 1{,}04\ €/\text{m}^2$.)

5. 8,8 mm:n korkeudelle

(Veden jäätyessä sen tilavuudeksi tulee $1{,}080 \cdot 0{,}930\ \text{dm}^3 = 1{,}0044\ \text{dm}^3$, joten ulos työntyvän jäälieriön tilavuus on $0{,}0044\ \text{dm}^3 = 4{,}4\ \text{cm}^3$.

Lieriön korkeus on $h = \frac{V}{A} = \frac{4{,}4}{5{,}00}$ cm.)

6. seitsemän

(Olkoon a vesimäärä, joka tulee 1,2 cm:n reiästä, ja x vesimäärä, joka tulee 1,9 cm:n reiästä. Vesimäärien suhde on yhtä suuri kuin halkaisijoiden neljänsien potenssien suhde eli $\frac{x}{a} = \frac{1{,}9^4}{1{,}2^4}$. Saadaan $x \approx 6{,}3a$. Vettä tulee siis 6,3-kertainen määrä.)

7. 62 %

(Olkoon a isotoopin määrä onnettomuushetkellä. Määrä tulee joka vuosi k-kertaiseksi, ja $k^{29}a = 0{,}5a$. Siis $k = \sqrt[29]{0{,}5} \approx 0{,}97638$. Määrä 20 vuoden kuluttua oli $k^{20}a \approx 0{,}62a$.)

8. vähintään 196 m

(Tornit ovat maapallon poikkileikkausympyrän säteiden jatkeita, ja ne ovat mahdollisimman lyhyitä, kun niiden huippujen kautta kulkeva suora sivuaa ympyrää. Ratkaistaan muodostuneesta tasakylkisestä kolmiosta tornien huippujen etäisyys maapallon keskipisteestä. Keskuskulma saadaan verrannosta $\frac{\alpha}{360°} = \frac{100}{2\pi \cdot 6370}$ tai yhtälöstä $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6\,370 = 100$, joista $\alpha \approx 0{,}8994628°$. Kolmion kylkien pituudelle x on $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{6370}{x}$, joten tornien vähimmäiskorkeus on $\frac{6370}{\cos\frac{\alpha}{2}} - 6\,370$.)

9. 37 522

(Jonon 123. jäsen saadaan lisäämällä lukuun 7 aritmeettisen jonon 0, 5, 10, … 123 ensimmäisen jäsenen summa. Aritmeettisen jonon 123. jäsen on $0 + 122 \cdot 5 = 610$ ja 123 ensimmäisen jäsenen summa $123 \cdot \frac{0 + 610}{2} = 37\,515$. Kysytty jäsen on $7 + 37\,515$.)

10. vähintään 1 718 euroa

(Olkoon x lahjoituksen pienin suuruus. Vuoden kuluttua pääoma on $1{,}045x - 200$, kahden vuoden kuluttua $1{,}045(1{,}045x - 200) - 300 = 1{,}045^2x - 509$, kolmen vuoden kuluttua $1{,}045(1{,}045^2x - 509) - 400 = 1{,}045^3x - 931{,}905$, neljän vuoden kuluttua $1{,}045(1{,}045^3x - 931{,}905) - 500 = 1{,}045^4x - 1473{,}841$ ja viiden vuoden kuluttua $1{,}045(1{,}045^4x - 1473{,}841) - 600 = 1{,}045^5x - 2140{,}164$. Ratkaistaan yhtälö $1{,}045^5x - 2140{,}164 = 0$.)

Suora

249. 5.57 (Nousuaika aikaistui 7 vuorokaudessa 23 minuuttia eli yhdessä vuorokaudessa $\frac{23}{7} \approx 3{,}286$ min.

12 vuorokauden kuluttua aurinko nousee $12 \cdot 3{,}286 \text{ min} \approx 39 \text{ min}$ aikaisemmin.)

250. -25 °C
(Lämpötila laski 0,84 km:n matkalla 5 °C, joten lasku kilometriä kohden on

$\frac{5}{0{,}84}$ °C $\approx 5{,}952$ °C. Koska

3,90 km $-$ 1,73 km = 2,17 km,
lämpötila huipulla on noin
-12 °C $- 2{,}17 \cdot 5{,}952$ °C.)

251. 15 ja -8

(Kulmakertoimet ovat $\frac{600}{40}$ ja $\frac{-400}{50}$.)

252. a) 0, x-akselin suuntainen

b) $-\frac{1}{4}$, laskeva

c) $\frac{1}{3}$, nouseva

d) ei kulmakerrointa, y-akselin suuntainen

253. Ei leikkaa.
(Molempien suorien kulmakerroin on 7, joten suorat ovat yhdensuuntaiset.)

254. a) $y = -\frac{1}{3}x - 2$ $\quad (y - (-4) = -\frac{1}{3}(x - 6))$

b) $y = -\frac{1}{3}x$

255. $y = -3x + 11$,

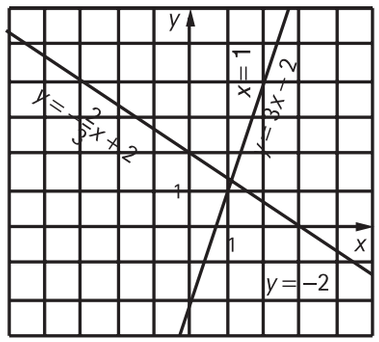
x-akselin pisteessä $(\frac{11}{3}, 0) = (3\frac{2}{3}, 0)$ ja

y-akselin pisteessä $(0, 11)$
(Suoran kulmakerroin on

$k = \frac{14 - (-4)}{-1 - 5} = -3$ ja yhtälö

$y - (-4) = -3(x - 5)$. Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä on $y = 0$, joten x-koordinaatti saadaan yhtälöllä $-3x + 11 = 0$.)

256.



257. $y = 1{,}32x - 24{,}2$, 134 km/h
(Muodostetaan pisteiden (60, 55) ja (85, 88) kautta kulkevan suoran yhtälö.

Suoran kulmakerroin on $\frac{88 - 55}{85 - 60} = 1{,}32$

ja yhtälö $y - 55 = 1{,}32(x - 60)$.)

258. a) $y = -2x - \frac{3}{2}$, kulmakerroin -2

b) $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$, kulmakerroin $\frac{1}{3}$

259. $y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$ (Suoran $8x - 6y + 11 = 0$

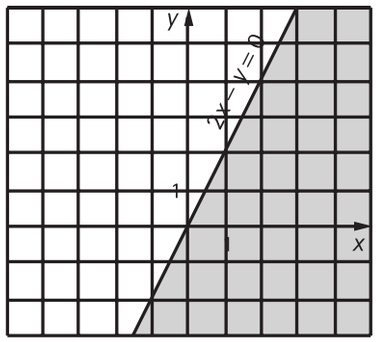
kulmakerroin on $\frac{4}{3}$, joten kysytyn suoran

yhtälö on $y - 2 = \frac{4}{3}(x - (-1))$.)

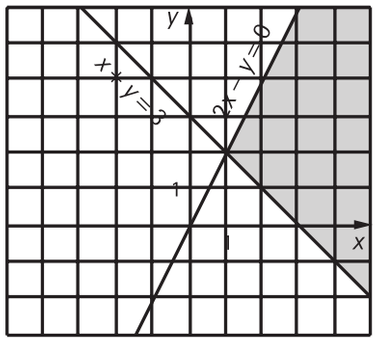
260. x-akselin pisteessä $(12, 0)$ ja y-akselin pisteessä $(0, 9)$. Kolmion pinta-ala on 54.
(x-akselin leikkauspisteessä on $y = 0$, ja y-akselin leikkauspisteessä on $x = 0$.

Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9$.)

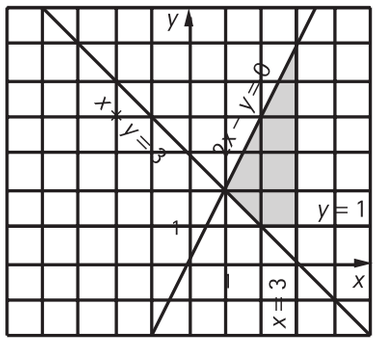
261. a) Epäyhtälö toteutuu suoralla $2x - y = 0$ ja sen alapuolella.



b) Epäyhtälö toteutuu kuvion tummennetussa alueessa ja sitä rajoittavilla puolisuorilla.



c) Epäyhtälö toteutuu kuvion nelikulmiossa ja sen reunalla.



262. $x = \frac{7}{11}$, $y = \frac{13}{11}$

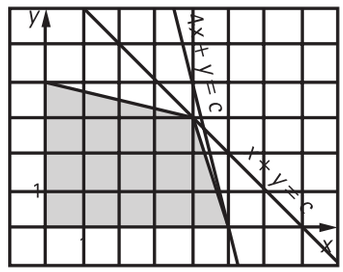
263. $(-27, -8)$

264. $(\frac{10}{7}, \frac{1}{7})$

265. 400 g halvempaa ja 600 g kalliimpaa
(Jos x (kg) on halvemman ja y (kg) kalliimman kahvilaadun määrä, niin
$x + y = 1$ ja $6{,}5x + 9y = 8$.)

266. neljän piirakan pusseja 35 kpl ja
kymmenen piirakan pusseja 26 kpl
(Jos x on neljän piirakan pussien ja
y kymmenen piirakan pussien lukumäärä,
niin $4x + 10y = 400$ ja $2x + 4y = 174$.)

267.



a) 7
(Lausekkeen $x + y$ arvo pisteessä $(4, 3)$.)
b) 20
(Lausekkeen $4x + y$ arvo pisteessä $(5, 0)$.)

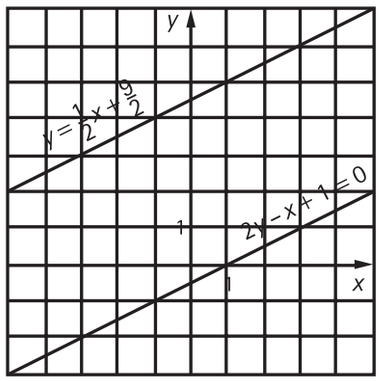
268. a) 90 (Muotoa $10x + 20y = c$ olevien suorien kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$. Ylin tätä muotoa oleva suora koskettaa alueeseen pisteessä $(3, 3)$.)
b) 225 (Muotoa $45x + 30y = c$ olevien suorien kulmakerroin on $-\frac{3}{2}$. Ylin tätä muotoa oleva suora kulkee pitkin alueen reunaviivaa pisteestä $(3, 3)$ pisteeseen $(5, 0)$.)
c) 1 200 (Muotoa $240x + 120y = c$ olevien suorien kulmakerroin on -2. Ylin tätä muotoa oleva suora koskettaa alueeseen pisteessä $(5, 0)$.)

269. a) 100 (Muotoa $50x + 20y = c$ olevien suorien kulmakerroin on $-\frac{5}{2}$. Alin tätä muotoa oleva suora koskettaa alueeseen pisteessä $(0, 5)$.)
b) 100 (Muotoa $30x + 40y = c$ olevien suorien kulmakerroin on $-\frac{3}{4}$. Alin tätä muotoa oleva suora koskettaa alueeseen pisteessä $(2, 1)$.)

270. 20,6° (Lämpötila on Turussa 5,2 °C korkeampi kuin Helsingissä. Jokainen kilometri Helsingistä Turkuun nostaa lämpötilaa $\frac{5{,}2}{165}$ °C $\approx 0{,}03153$ °C.
Lämpötila Salossa on
$17{,}1\ °\text{C} + 110 \cdot \frac{5{,}2}{165}$ °C.)

271. 12
(Kolmion kannaksi valitaan suorien y-akselista erottama jana, jonka pituus on 6.
Yhtälöllä $-x + 4 = \frac{1}{2}x - 2$ ratkaistaan suorien leikkauspisteen x-koordinaatti 4.
Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4$.)

272. $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$



(Suora on yhdensuuntainen suoran $2y - x + 1 = 0$ kanssa, joten sen kulmakerroin on sama kuin suoran $2y - x + 1 = 0$ (ratkaistu muoto $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$) kulmakerroin $\frac{1}{2}$. Saadaan yhtälö $y - 5 = \frac{1}{2}(x - 1)$.
Tarkan kuvan saa käyttämällä hyväksi pisteistä $(1, 0)$ ja $(1, 5)$ lähteviä apukolmioita.)

273. $(-\frac{18}{13}, \frac{12}{13}) = (-1\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$
(Kun yhtälöt kerrotaan luvulla 6, ne tulevat muotoon $3x - 2y = -6$ ja $2x + 3y = 0$.)

274. $a = -\frac{5}{3}$, $b = -\frac{10}{3}$
(Pisteen $(-1, 2)$ koordinaattien tulee toteuttaa kumpikin yhtälö. Saadaan yhtälöpari $-a + 2b + 5 = 0$ ja $-b + 2a = 0$.)

275. Etäisyys on 80.

(Leikkauspiste on (48, 64). Jos d on leikkauspisteen etäisyys origosta, niin $d^2 = 64^2 + 48^2$.)

276. Juha 658,60 euroa, Maria 853,57 euroa

(Jos x on Juhan ja y Marian palkkio, niin $x + y = 1512{,}17$ ja $0{,}63y = 1{,}15 \cdot 0{,}71x$.)

277. $\frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$

(Kuviosta nähdään, että ylin muotoa $2x + y = c$ oleva suora (kulmakerroin -2), joka koskettaa alueeseen, kulkee suoran $3x + 2y = 16$ ja x-akselin leikkauspisteen kautta. Havainnon voi tarkistaa kulmakertoimia vertaamalla: kulmakerroin -2 on molempien reunasuorien kulmakertoimia -1 ja $-\frac{3}{2}$ pienempi, joten suorat $2x + y = c$ laskevat molempia reunasuoria jyrkemmin. Suoran $3x + 2y = 16$ ja x-akselin leikkauspiste on $(\frac{16}{3}, 0)$.

Suurin arvo on $2 \cdot \frac{16}{3} + 0$.)

278. peruskorvattava 12,21 € ja erityiskorvattava 38,80 €

(Olkoon x peruskorjattavan ja y erityiskorvattavan lääkkeen hinta. Saadaan yhtälöpari $x + y = 51{,}01$ (hinnat yhteensä) ja $8{,}41 + 0{,}5(x - 8{,}41) + 4{,}20 + 0{,}25(y - 4{,}20) = 23{,}16$ (potilaan maksettava määrä). Jälkimmäisen yhtälön sijasta voidaan muodostaa myös yhtälö $0{,}5(x - 8{,}41) + 0{,}75(y - 4{,}20) = 51{,}01 - 23{,}16$ (korvauksen määrä).)

279. a) 28 000 b) 54 000

(Jos myynti kasvaa lineaarisesti, se kasvaa joka kuukausi yhtä paljon. Koska $\frac{13\,238 - 7\,817}{3} = 1\,807$, ennuste joulukuun myynniksi on $7\,817 + 11 \cdot 1\,807$.
Jos myynti kasvaa eksponentiaalisesti, se tulee joka kuukausi kerrotuksi samalla luvulla k. Koska $k^3 \cdot 7\,817 = 13\,238$, niin $k = \sqrt[3]{\frac{13\,238}{7\,817}} \approx 1{,}1920$. Ennuste joulukuun myynniksi on $k^{11} \cdot 7\,817$.)

280. a) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$

(Suoran kulmakerroin on $k = \frac{-1 - 11}{7 - (-2)} = -\frac{4}{3}$ ja yhtälö $y - (-1) = -\frac{4}{3}(x - 7)$.)

b) $\frac{25}{3}$, $\frac{25}{4}$ ja $\frac{125}{12}$

(Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, \frac{25}{3})$, joten y-akselilla olevan sivun pituus on $\frac{25}{3}$. Ratkaisemalla yhtälö $-\frac{4}{3}x + \frac{25}{3} = 0$ saadaan suoran ja x-akselin leikkauspiste $(\frac{25}{4}, 0)$, joten x-akselilla olevan sivun pituus on $\frac{25}{4}$. Jos c on kolmannen sivun (kolmion hypotenuusan) pituus, niin $c^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2 = \frac{625}{9} + \frac{625}{16} = \frac{15\,625}{144}$, joten $c = \sqrt{\frac{15\,625}{144}} = \frac{\sqrt{15\,625}}{\sqrt{144}} = \frac{125}{12}$.)

281. a) $y = 0{,}9613x + 0{,}3165$

(Muodostetaan pisteiden $(-9{,}9;\ -9{,}2)$ ja $(18{,}5;\ 18{,}1)$ kautta kulkevan suoran yhtälö. Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{18{,}1 - (-9{,}2)}{18{,}5 - (-9{,}9)} = \frac{27{,}3}{28{,}4}$$ ja yhtälö

$$y + 9{,}2 = \frac{27{,}3}{28{,}4}(x + 9{,}9)$$ eli

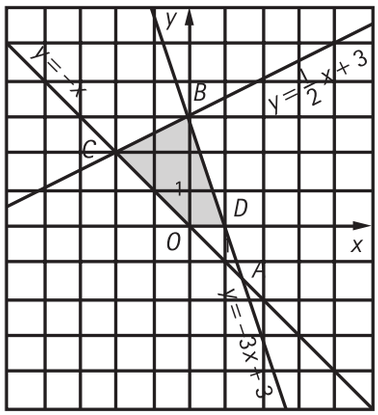
$$y = \frac{27{,}3}{28{,}4}x + \frac{27{,}3}{28{,}4} \cdot 9{,}9 - 9{,}2$$ eli

$y = 0{,}9613x + 0{,}3165$

(kertoimet neljän numeron tarkkuudella).)

b) lämpötilassa 8,2 °C (Ratkaistaan yhtälö $x = 0{,}9613x + 0{,}3165$.)

282.

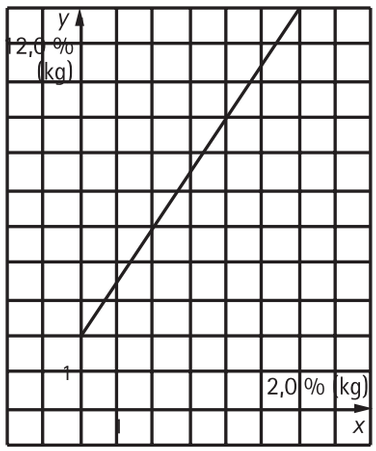


Epäyhtälöryhmä toteutuu kuvion nelikulmion sisällä ja reunalla.

Alueen pinta-ala on $4\frac{1}{2}$.

(Lasketaan esimerkiksi suorakulmaisten kolmioiden ODB ja OBC pinta-alojen summa. Toinen tapa on ympäröidä nelikulmio suorakulmiolla ja vähentää suorakulmion pinta-alasta kolmen suorakulmaisen kolmion pinta-ala.)

283. $y = 1{,}5x + 2$, missä $x \geqslant 0$



(Tulee olla

$0{,}02x + 0{,}12y = 0{,}08(x + y + 1{,}0)$.

Ratkaistaan yhtälöstä y.)

284. Kannattaa valmistaa 800 pullaa ja 600 sämpylää. Jos valmistetaan pelkkiä sämpylöitä, ohrajauhot loppuvat, kun on valmistettu 900 sämpylää.
(Jos x on valmistettavien terveyspullien ja y terveyssämpylöiden lukumäärä, niin $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $30x + 10y \leqslant 30\,000$ ja $15x + 40y \leqslant 36\,000$.
Muotoa $0{,}45x + 0{,}25y = c$ olevien suorien kulmakerroin on $-\frac{9}{5}$.

Ylin tätä muotoa oleva suora, joka koskettaa tasoalueeseen, kulkee suorien $30x + 10y = 30\,000$ (ratkaistu muoto $y = -3x + 3000$) ja $15x + 40y = 36\,000$ (ratkaistu muoto $y = -\frac{3}{8}x + 900$) leikkauspisteen kautta.
Tämän näkee huolella piirretystä kuviosta (koordinaatiston yksikkö esim. 300).
Perusteluksi voidaan myös verrata kulmakertoimia: suorien $0{,}45x + 0{,}25y = c$ kulmakerroin $-\frac{9}{5}$ on reunasuorien kulmakertoimien $-\frac{3}{8}$ ja -3 välissä, eli $-3 < -\frac{9}{5} < -\frac{3}{8}$, joten niiden jyrkkyys on reunasuorien jyrkkyyksien välissä.
Jos valmistetaan pelkkiä sämpylöitä eli $x = 0$, niin vehnäjauhoja riittää 3 000 sämpylään ja ohrajauhoja 900 sämpylään, eli ohrajauhot loppuvat ensin.)

Derivaatta ja funktion kulku

285. a) 1 cm/vrk ja 0,7 cm/vrk
b) 4 cm/vrk

286. a) $f(-3) \approx 3{,}6$, $f'(-3) = 0$
b) $f(1) \approx 0{,}6$, $f'(1) = 0$
c) $f(2) = 1$, $f'(2) \approx 1$

287. a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) -1

288. nollakohdat $-4{,}3$, $-3{,}3$, 0, 3,3 ja 4,3, $f'(x_1) \approx 0{,}9$
($x_1 = -4{,}3$)

289. $P(-2) = 12$ ja $P'(-2) = 7$
($P'(x) = 6x^2 + 6x - 5$)

290. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$, $f'(x) = 3x^3 - 2x^2$

($f(x) = \frac{9x^4 - 8x^3}{12} = \frac{9x^4}{12} - \frac{8x^3}{12}$

$= \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$, $f'(x) = \frac{3}{4} \cdot 4x^3 - \frac{2}{3} \cdot 3x^2$)

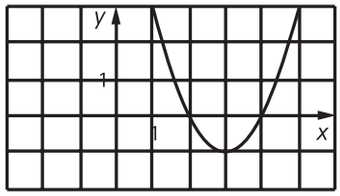
291. 3 (Lasketaan funktion $f(x) = x^2 + 5x + 4$ derivaatta $f'(-1)$ sijoittamalla derivaattafunktioon $f'(x) = 2x + 5$ muuttujan arvo $x = -1$.)

292. kohdassa $x = \frac{1}{2}$ ($f(x) = x^2 + x$ ja $f'(x) = 2x + 1$. Ratkaistaan yhtälö $2x + 1 = 2$.)

293. $g'(0) = 3$, derivaattafunktion nollakohdat 1 ja -1
($g(x) = 3x - x^3$, joten $g'(x) = 3 - 3x^2$.
Yhtälö $3 - 3x^2 = 0$ tulee muotoon $x^2 = 1$.)

294. 40 cm korkea, kasvaa nopeudella 12 cm/viikko.
(Korkeus on $f(5)$ ja kasvunopeus $f'(5)$, missä $f'(t) = -0{,}48t^2 + 4{,}8t$.)

295. huippu $(3, -1)$



(Huipun x-koordinaatti on funktion $f(x) = x^2 - 6x + 8$ derivaattafunktion $f'(x) = 2x - 6$ nollakohta. Piirtäessä riittää, että lasketaan pisteitä huipun toiselta puolelta ja käytetään hyväksi paraabelin symmetriaa.)

296. 10 m
(Paraabelin huipun x-koordinaatti on 20 ja y-koordinaatti $y = 0{,}025 \cdot 20^2 - 20 = -10$.)

297. 50
(Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio f saa suurimman arvon huipun kohdalla. Huipun x-koordinaatti on derivaattafunktion $f'(x) = -6x + 24$ nollakohta 4 ja suurin arvo $f(4)$.)

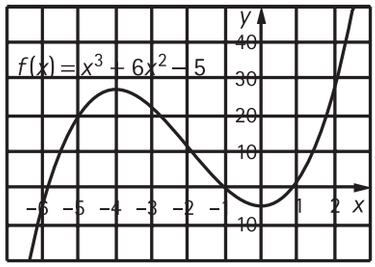
298. $x^2 + x$, summa on pienin, kun $x = -\frac{1}{2}$, ja summan pienin arvo on $-\frac{1}{4}$.

(Koska funktion $f(x) = x^2 + x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, funktio saa pienimmän arvonsa huipun kohdalla derivaattafunktion $f'(x) = 2x + 1$ nollakohdassa.)

299. $a = 29$
(Paraabelin huipun x-koordinaatti on funktion $f(x) = x^2 - 10x + a$ derivaattafunktion $f'(x) = 2x - 10$ nollakohta $x = 5$ ja y-koordinaatti $y = 5^2 - 10 \cdot 5 + a = a - 25$. Tulee olla $a - 25 = 4$.)

300. Kasvava, kun $x \leqslant 4$, ja vähenevä, kun $x \geqslant 4$. Maksimiarvo on 31.
(Voidaan laatia funktion f derivaattafunktion $f'(x) = -6x + 24$ merkkikaavio (kuvaaja laskeva suora) ja täydentää se funktion f kulkukaavioksi. Koska funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, päätelmät voidaan tehdä myös hahmotellun kuvaajan avulla ilman kulkukaaviota: funktio on kasvava huipun vasemmalla puolella ja vähenevä oikealla puolella, ja huipun y-koordinaatti on maksimiarvo.)

301. Kasvava, kun $x \leqslant -4$ tai $x \geqslant 0$, ja vähenevä, kun $-4 \leqslant x \leqslant 0$.
Maksimikohta -4 ja minimikohta 0.



(Funktion f derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 + 12x$ nollakohdat ovat -4 ja 0. Laaditaan derivaattafunktion merkkikaavio (kuvaaja ylöspäin aukeava paraabeli) ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi. Ääriarvokohdat nähdään kulkukaaviosta.)

302. Kasvava, kun $-1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}$, ja vähenevä, kun $x \leqslant -1$ tai $x \geqslant \frac{5}{3}$.

(Derivaattafunktion $g'(x) = -3x^2 + 2x + 5$ nollakohdat ovat -1 ja $\frac{5}{3}$. Laaditaan derivaattafunktion merkkikaavio (kuvaaja alaspäin aukeava paraabeli) ja täydennetään se funktion g kulkukaavioksi.)

303. suurin arvo 16, pienin arvo -16

(Derivaattafunktion $f'(x) = 12 - 3x^2$ nollakohdat ovat -2 ja 2. Välille $-4 \leqslant x \leqslant 1$ rajatun kulkukaavion (derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli) mukaan funktio f saa välillä suurimman arvon jommassakummassa päätepisteessä -4 tai 1 ja pienimmän arvon kohdassa -2. Koska $f(-4) = 16$ ja $f(1) = 11$, suurin arvo on 16. Koska $f(-2) = -16$, pienin arvo on -16.)

304. kohdassa $x = 2$, suurin arvo 3

(Derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ nollakohdat ovat 1 ja $-\frac{1}{3}$. Välille $0 \leqslant x \leqslant 2$ rajatun kulkukaavion mukaan funktio $f(x)$ saa välillä $0 \leqslant x \leqslant 2$ suurimman arvon jommassakummassa päätepisteessä 0 tai 2. Koska $f(0) = 1$ ja $f(2) = 3$, suurin arvo on $f(2) = 3$.)

305. a) suurin 8, pienin 0

b) suurin 3, pienin -1

(Derivaattafunktion $f'(x) = 2x - 4$ nollakohta on $x = 2$. Voidaan laatia derivaattafunktion $f'(x)$ merkkikaavio (kuvaaja nouseva suora), täydentää se funktion $f(x)$ kulkukaavioksi ja rajata kulkukaavio ao. välille. Päätelmät voidaan tehdä myös hahmotellun kuvaajaparaabelin tuella ilman kulkukaaviota: a-kohdan väli on huipun oikealla puolella, missä funktio on kasvava. b-kohdan väli sisältää huipun x-koordinaatin, jossa funktio saa pienimmän arvon. Suurimman arvon funktio saa jommassakummassa päätepisteessä.)

306. $f'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{2}$, $f'(x) = 0$, kun

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tai $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

($f'(x) = 6x^2 - 3$ ja

$f'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3 = 6 \cdot \frac{3}{4} - 3.$

Yhtälö $6x^2 - 3 = 0$ voidaan saattaa muotoon $x^2 = \frac{1}{2}$. Jos yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla, juuret saadaan (hyväksyttävässä) muodossa $\frac{\sqrt{72}}{12}$ ja $-\frac{\sqrt{72}}{12}$.)

307. kohdat 1 ja $\frac{1}{3}$

($f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$. Yhtälö

$3x^2 - 4x + 3 = 2$ eli yhtälö

$3x^2 - 4x + 1 = 0$ ratkaistaan ratkaisukaavalla.)

308. suurin arvo 18 ja pienin arvo 0
(Derivaattafunktiolla $f'(x) = 6 - x$ on nollakohta $x = 6$. Laaditaan derivaattafunktion merkkikaavio (kuvaaja laskeva suora), täydennetään se funktion f kulkukaavioksi ja rajataan kulkukaavio välille $0 \leqslant x \leqslant 10$. Kulkukaavion mukaan funktion f suurin arvo välillä $0 \leqslant x \leqslant 10$ on $f(6)$ ja pienin arvo joko $f(0)$ tai $f(10)$. Koska funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, tulokseen voidaan päätyä myös ilman kulkukaaviota: funktion f arvo on suurin huipun kohdalla kohdassa $x = 6$ ja pienin jommassakummassa välin päätepisteistä.)

309. Kaikki arvot, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin 4.
(Funktion derivaattafunktio on $-x^2 - 2x + 3$. Funktion $-x^2 - 2x + 3$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa kaikki arvot, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin paraabelin huipun y-koordinaatti. Derivaatan $\mathrm{D}(-x^2 - 2x + 3) = -2x - 2$ nollakohta on -1, joten huipun y-koordinaatti on $-(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 4$.)

310. Vähenevä, kun $-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 1$, ja
kasvava, kun $x \leqslant -\frac{5}{3}$ tai $x \geqslant 1$.
Arvo $f(-1{,}6666667)$ on suurempi.
(Derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ nollakohdat ovat 1 ja $-\frac{5}{3}$. Väheneminen ja kasvaminen päätellään laatimalla derivaattafunktion $f'(x)$ merkkikaavio ja täydentämällä se funktion $f(x)$ kulkukaavioksi. Kohdat $-1{,}6666667$ ja $-1{,}6666668$ ovat välillä $x \leqslant -\frac{5}{3}$, jolla funktio on kasvava. Funktio f saa siis suuremman arvon oikeanpuoleisessa kohdassa $-1{,}6666667$.)

311. Funktio on kasvava, kun derivaatta on positiivinen, ja vähenevä, kun derivaatta on negatiivinen. Funktion f derivaattafunktiolla $f'(x) = 15x^2 + 13x + 3$ ei ole nollakohtia ja derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten derivaattafunktio $f'(x)$ on kaikkialla positiivinen. Siis funktio f on kaikkialla kasvava.

312. nopeudelle 6 500 arkkia/tunti
(Oletetaan, että painonopeutta lisätään $x \cdot 100 = 100x$ arkilla tunnissa, jolloin kone painaa $5000 + 100x$ arkkia tunnissa.
Kone toimii tällöin $20 - 0{,}25x$ tuntia vuorokaudessa, ja vuorokaudessa painettujen arkkien lukumäärä on
$f(x) = (5000 + 100x)(20 - 0{,}25x)$
$= -25x^2 + 750x + 100\,000$.
Funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa suurimman arvon derivaattafunktion $f'(x) = -50x + 750$ nollakohdassa.)

313. pohjaneliön sivu 4,0 cm ja kehikon korkeus 16,0 cm

(Jos s on pohjaneliön sivun pituus ja t särmiön korkeus, niin särmiön tilavuus on $V = s^2t$. Koska $8s + t = 48$, niin $t = 48 - 8s$. Särmiön tilavuus muuttujan s funktiona on $V(s) = s^2(48 - 8s) = 48s^2 - 8s^3$. Muuttujan s mahdolliset arvot ovat välillä $0 \leqslant s \leqslant 6$ (ääritapaukset $s = 0$ ja $t = 0$). Derivaattafunktion $V'(s) = 96s - 24s^2$ nollakohdat ovat $s = 0$ ja $s = 4$. Funktion $V(s)$ välille $0 \leqslant s \leqslant 6$ rajatusta kulkukaaviosta nähdään, että funktio saa suurimman arvon kohdassa $s = 4$.)

314. 10 cm korkea, marjoja mahtuu enimmillään 18 l

(Olkoon x (cm) poisleikatun sivun pituus. Laatikon pohjasärmien pituudet ovat $80 - 2x$ ja $50 - 2x$, ja laatikon korkeus on x, joten laatikon tilavuus on

$$V(x) = x(80 - 2x)(50 - 2x)$$
$$= 4x^3 - 260x^2 + 4000x.$$

Muuttujan x mahdolliset arvot ovat välillä $0 \leqslant x \leqslant 25$.
Derivaattafunktion $V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000$ nollakohdat ovat 10 ja $33\frac{1}{3}$.

Välille $0 \leqslant x \leqslant 25$ rajatusta funktion $V(x)$ kulkukaaviosta nähdään, että tilavuus $V(x)$ on suurin, kun $x = 10$.
Laatikon tilavuus on tällöin $V(10) = 18\,000 \text{ cm}^3 = 18 \text{ l}$.)

315. 45 dm^3

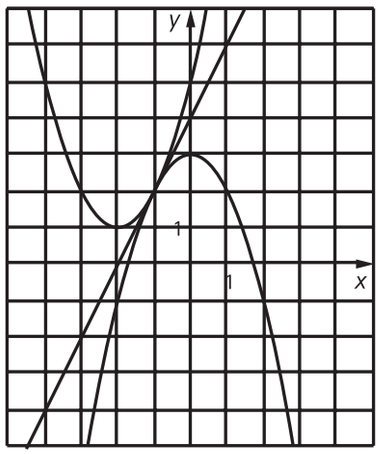
(Jos s (cm) on laukun pituus ja t (cm) laukun leveys, niin laukun tilavuus $V = 20st$.
Koska $s + t + 20 = 115$, niin $t = 95 - s$.
Laukun tilavuus muuttujan s funktiona on $V(s) = 20s(95 - s) = 1900s - 20s^2$.
Funktion $V(s)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio $V(s)$ saa suurimman arvon derivaattafunktion $V'(s) = 1900 - 40s$ nollakohdassa $s = 47{,}5$. Laukun tilavuus on tällöin
$V(47{,}5) = 20 \cdot 47{,}5 \cdot (95 - 47{,}5)$
$= 45\,125 \text{ (cm}^3\text{)}$.)

316. yhden osaston mitat 16,7 m × 10,0 m, pinta-ala 833 m^2

(Olkoot s (m) ja t (m) yhden osaston sivujen pituudet niin, että s on väliaitojen suuntainen sivu. Aitauksen pinta-ala on $A = 5st$. Koska $6s + 10t = 200$, niin $t = 20 - 0{,}6s$. Pinta-ala muuttujan s funktiona on $A(s) = 5s(20 - 0{,}6s) = 100s - 3s^2$. Funktion $A(s)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa suurimman arvon derivaattafunktion $A'(s) = 100 - 6s$ nollakohdassa $s = \frac{100}{6} \approx 16{,}7$. Tällöin on $t = 20 - 0{,}6 \cdot \frac{100}{6} = 10$ ja pinta-ala on

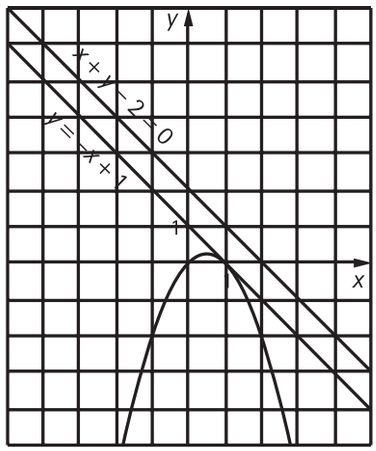
$$A = 5 \cdot \frac{100}{6} \cdot 10 \approx 833 \text{ (m}^2\text{)}.)$$

317. tangentin yhtälö $y = 2x + 4$



(Leikkauspisteen x-koordinaatti ratkaistaan yhtälöllä $x^2 + 4x + 5 = -x^2 + 3$ eli yhtälöllä $2x^2 + 4x + 2 = 0$. Yhtälöllä on yksi juuri $x = -1$, joten käyrillä on vain yksi yhteinen piste. Yhteisen pisteen y-koordinaatti on $y = -(-1)^2 + 3 = 2$.
Tangentin kulmakerroin on funktion $f(x) = -x^2 + 3$ derivaatta kohdassa -1.
Koska $f'(x) = -2x$, niin $f'(-1) = 2$.
Tangentin yhtälö on $y - 2 = 2(x - (-1))$.
Piirtämistä varten kannattaa ensin määrittää paraabelien huiput.)

318. $y = -x + 1$



(Suoran yhtälön $x + y - 2 = 0$ ratkaistu muoto on $y = -x + 2$, joten suoran kulmakerroin on -1. Funktion $f(x) = x - x^2$ kuvaajalle muuttujan arvon x kohdalle piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(x) = 1 - 2x$. Tangentin kulmakerroin on -1, kun $1 - 2x = -1$ eli kun $x = 1$. Käyrän pisteen y-koordinaatti on $y = 1 - 1^2 = 0$, ja tangentin yhtälö on $y - 0 = -1(x - 1)$.)

319. 160

(Välillä $0 \leqslant x \leqslant 10$ kuvaaja noudattelee pisteen $(0, 100)$ kautta kulkevaa suoraa, jonka kulmakerroin on 5. Suoran yhtälö on $y = 5x + 100$, joten
$f(10) = 5 \cdot 10 + 100 = 150$.
Välillä $10 \leqslant x \leqslant 20$ kuvaaja noudattelee pisteen $(10, 150)$ kautta kulkevaa suoraa, jonka kulmakerroin on 1.
Suoran yhtälö on
$y - 150 = 1(x - 10)$ eli $y = x + 140$. Siis
$f(20) = 20 + 140 = 160$.)

320. a) suurin arvo 4, pienin arvo -1
(Merkintä $[0, 2]$ tarkoittaa väliä $0 \leqslant x \leqslant 2$. Funktion f derivaattafunktion $f'(x) = 6x^2 - 6x$ nollakohdat ovat 0 ja 1. Välille $0 \leqslant x \leqslant 2$ rajatusta kulkukaaviosta nähdään, että funktio saa välillä suurimman arvon jommassakummassa päätepisteessä 0 tai 2 ja pienimmän arvon kohdassa 1. Koska $f(0) = 0$ ja $f(2) = 4$, suurin arvo on 4. Pienin arvo on $f(1) = -1$.)

b) $a = -3\frac{1}{2}$, suurin arvo $\frac{1}{2}$

(Funktion $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + a$ pienin arvo välillä $0 \leqslant x \leqslant 1$ on $g(1) = -1 + a$ ja suurin arvo $g(2) = 4 + a$.

Ehdosta $-1 + a = -4\frac{1}{2}$ saadaan $a = -3\frac{1}{2}$,

jolloin suurin arvo on $4 + (-3\frac{1}{2})$.)

321. Derivaatta $f'(a)$ on funktion f kuvaajalle pisteeseen $(a, f(a))$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

a) $f'(1) = -\frac{5}{4}$

(Tangentin $4y + 5x = 2$ kulmakerroin on $-\frac{5}{4}$. Siis $f'(1) = -\frac{5}{4}$.)

b) Ei voi.
(Suoran $y = x - 2$ kulmakerroin on 1. Koska $f'(x) = 2x$, ainoa kuvaajan piste, johon piirretyn tangentin kulmakerroin on 1, on piste $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Suora $y = x - 2$ ei kuitenkaan kulje pisteen $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ kautta, sillä $\frac{1}{2} - 2 \neq \frac{1}{4}$.)

322. säde 6,2 cm, suurin tilavuus 250 cm^3
(Suoran ympyräkartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, missä r on kartion pohjaympyrän säde ja h kartion korkeus.
Koska $2r + h = 18{,}6$, niin $h = 18{,}6 - 2r$ ja tilavuus muuttujan h funktiona on

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2(18{,}6 - 2r)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(18{,}6r^2 - 2r^3).$$

Muuttujan r mahdolliset arvot ovat välillä $0 \leqslant r \leqslant 9{,}3$ (ääritapaukset $r = 0$ ja $h = 0$). Derivaattafunktion $V'(h) = \frac{1}{3}\pi(37{,}2r - 6r^2)$ arvo on nolla, kun $37{,}2r - 6r^2 = 0$ eli kun $r(37{,}2 - 6r) = 0$. Derivaattafunktion nollakohdat ovat 0 ja 6,2. Välille $0 \leqslant r \leqslant 9{,}3$ rajatusta kulkukaaviosta (derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli) nähdään, että tilavuus on suurin, kun $r = 6{,}2$. Tällöin on $h = 18{,}6 - 2 \cdot 6{,}2 = 6{,}2$ ja

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6{,}2^2 \cdot 6{,}2$ (cm^3).)

323. 58,0°:n kulmassa
(Sijoitetaan paraabeli koordinaatistoon niin, että lyöntipaikka on origossa ja reikä pisteessä $(50, 0)$. Symmetrian vuoksi huipun x-koordinaatti on 25, joten huippu on pisteessä $(25, 20)$. Paraabelin yhtälö on $y = ax^2 + bx + c$. Koska paraabeli kulkee origon kautta, niin $c = 0$. Koska paraabeli kulkee pisteiden $(50, 0)$ ja $(25, 20)$ kautta, niin $2500a + 50b = 0$ ja $625a + 25b = 20$. Yhtälöparista saadaan $a = -0{,}032$ ja $b = 1{,}6$, joten paraabeli on $y = -0{,}032x^2 + 1{,}6x$. Funktion $f(x) = -0{,}032x^2 + 1{,}6x$ derivaatta kohdassa 50 on $-1{,}6 = -\frac{8}{5}$. Kulmakertoimen apukolmiosta nähdään, että jos α on pisteeseen $(50, 0)$ piirretyn paraabelin tangentin ja x-akselin välinen kulma, niin $\tan\alpha = 1{,}6$.)

Todennäköisyys ja tilastot

324. $\frac{5}{9} \approx 0{,}56$

(Mahdollisia kahden nopan heiton $(1, 1)$, $(1, 2)$ jne. tuloksia on 36, ja ne voidaan merkitä koordinaatistoon. Suotuisia tuloksia on 20.)

325. $\frac{1}{4} = 0{,}25$

(Mahdollisia heittotuloksia $(1, 1)$, $(1, 2)$ jne., missä ensimmäinen silmäluku on tavallisen nopan ja toinen nelitahokkaan, on 24. Heittotulokset voidaan merkitä koordinaatistoon. Suotuisia alkeistapauksia on 6.)

326. a) $0{,}80$ $(\frac{167}{208})$

b) $0{,}49$ $(\frac{161}{208}$, missä $161 = 328 - 167$.)

327. $0{,}58$ (Toinen köydenpätkä on vähintään $9{,}0$ m, jos katkaisukohdan etäisyys jommastakummasta päätepisteestä on vähemmän kuin $3{,}7$ m. Suotuisan osan pituus on $2 \cdot 3{,}7$ m.)

328. $0{,}22$
(Suotuisa osa on neliö, jonka sivun pituus $3{,}0\text{ m} - 2 \cdot 0{,}8\text{ m} = 1{,}4$ m. Todennäköisyys on suotuisan osan pinta-alan suhde koko neliön pinta-alaan.)

329. a) $0{,}25$ (P(mies kuuluu) · P(vaimo ei kuulu) $= 0{,}44 \cdot 0{,}56$)
b) $0{,}49$ (P(mies kuuluu) · P(vaimo ei kuulu) + P(mies ei kuulu) · P(vaimo kuuluu) $= 0{,}44 \cdot 0{,}56 + 0{,}56 \cdot 0{,}44$)
c) $0{,}31$ (P(mies ei kuulu) · P(vaimo ei kuulu) $= 0{,}56 \cdot 0{,}56$)
d) $0{,}69$ (Voidaan laskea vastatapahtuman kautta: P(ainakin toinen kuuluu) = 1 − P(kumpikaan ei kuuluu).
Voidaan laskea myös suoraan:
P(ainakin toinen kuuluu)
= P(mies kuuluu) · P(nainen kuuluu)
+ P(mies kuuluu) · P(nainen ei kuulu)
+ P(mies ei kuulu) · P(nainen kuuluu).)

330. $0{,}00935$ $(0{,}513^7)$

331. $0{,}25$ (P(samaa sukupuolta) = P(kaikki poikia) + P(kaikki tyttöjä) $= 0{,}51^3 + 0{,}49^3$)

332. $0{,}52$ (P(ainakin yksi Sari) = 1 − P(ei yhtään Saria) $= 1 - 0{,}96^{18}$)

333. a) 0,46 (Voittoarpa voi olla ensimmäinen tai toinen arpa.
$P(\text{yksi voitto}) = 0{,}35 \cdot 0{,}65 + 0{,}65 \cdot 0{,}35$.)
b) 0,44 (Voittoarpa voi olla ensimmäinen, toinen tai kolmas arpa.
$P(\text{yksi voitto}) = 0{,}35 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}65 + 0{,}65 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 + 0{,}65 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35$.)

334. 480 ($5 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3$)

335. 78 125 (1. lovella on 5 vaihtoehtoa, 2. lovella on 5 vaihtoehtoa jne. Tuloperiaatteen nojalla erilaisia avaimia on 5^7.)

336. 5 040 (luvun 7 kertoma)

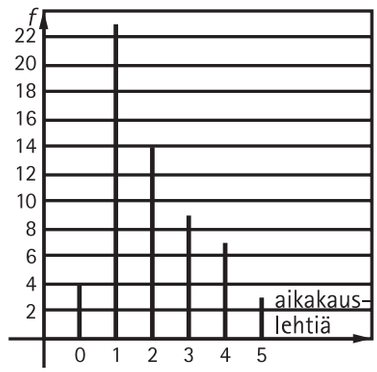
337. 495 ($\binom{12}{4}$)

338. a) lottorivejä 12 271 512,
todennäköisyys $\frac{1}{12271512} \approx 8{,}1 \cdot 10^{-8}$
(Erilaisten lottorivien lukumäärä on $\binom{48}{6}$.)

b) lottorivejä 5 245 786,
todennäköisyys 0,43
(Lottorivit, joissa ei ole yhtään oikeaa numeroa, ovat $48 - 6 = 42$ väärän numeron joukon kuuden alkion osajoukkoja, joiden lukumäärä on $\binom{42}{6}$. Rivit ovat suotuisia alkeistapauksia tapahtumalle ”nolla oikein”.)

339. 63 kg ($\bar{x} = \frac{425 \text{ kg} + 10 \cdot 52 \text{ kg}}{15}$)

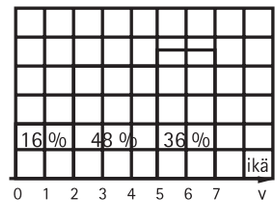
340. tyyppiarvo 1, mediaani 2, keskiarvo 2,0



341. a) 4,0 vuotta (Jokaista luokkaa edustaa luokkakeskus eli luokan todellisten rajojen keskiarvo. Ensimmäisen luokan luokkakeskus on $(0 + 2) : 2 = 1$, toisen luokan $(2 + 5) : 2 = 3{,}5$ ja kolmannen luokan $(5 + 7) : 2 = 6$.)

b)

ikä (vuotta)	%
0–1	16
2–4	48
5–6	36



(Histogrammi muodostuu toisissaan kiinni olevista pylväistä, joiden rajat ovat todellisten luokkarajojen kohdalla. Pylväiden pinta-alat kuvaavat luokan suhteellista frekvenssiä. Ensimmäisen pylvään korkeus on $\frac{16}{2} = 8$ yksikköä, toisen pylvään korkeus $\frac{48}{3} = 16$ yksikköä ja kolmannen pylvään korkeus $\frac{36}{2} = 18$ yksikköä.
Kuviossa yksi ruutuväli on 4 yksikköä.)

342. 3,7 °C
(Keskiarvo on 2 °C. Keskihajonta on poikkeamien neliöiden keskiarvon
$\frac{(0-2)^2+(6-2)^2+(-1-2)^2+(7-2)^2+(-2-2)^2}{5}$
= 14 neliöjuuri. Keskihajonnalla on sama yksikkö kuin havaintoarvoilla.)

343. 1,31 (Laskimessa on kaksi hajontanäppäintä, varsinainen keskihajonta (yleensä σ tai s_n) ja niin sanottu otoskeskihajonta (yleensä s tai s_{n-1}). Varsinainen keskihajonta on hajontaluvuista pienempi.)

344. a) 88 %:lla (Pituutta 56,0 cm vastaava normitettu arvo on $z = \frac{56{,}0 - 52{,}0}{3{,}5} \approx 1{,}14$. Taulukon mukaan normitetun arvon 1,14 alapuolella on 87,79 % jakaumasta.)
b) 72 %:lla (Pituutta 50,0 cm vastaava normitettu arvo on
$z = \frac{50{,}0 - 52{,}0}{3{,}5} \approx -0{,}57$. Normitetun arvon −0,57 yläpuolella on sama osuus jakaumasta kuin normitetun arvon 0,57 alapuolella eli taulukon mukaan 71,57 %.)
c) 4,4 %:lla (Pituutta 46,0 cm vastaava normitettu arvo on −1,71. Normitetun arvon −1,71 alapuolella on sama osuus jakaumasta kuin normitetun arvon 1,71 yläpuolella eli taulukon mukaan
100 % − 95,64 % = 4,36 %.)

345. a) 27 % (Nopeutta 90 km/h vastaava normitettu arvo on $z = 0{,}60$. Taulukon mukaan arvon alapuolella on 72,57 % havainnoista ja yläpuolella siten
100 % − 72,57 % = 27,43 % havainnoista.)
b) 3,2 % (Nopeutta 100 km/h vastaava normitettu arvo on $z = 1{,}85$. Taulukon mukaan arvon yläpuolella on
100 % − 96,78 % = 3,22 % havainnoista.)

346. a) 91 pistettä (Taulukon mukaan z:n arvo, joka alapuolella on 75 % havainnoista, on $z \approx 0{,}67$. Hyväksymisrajan tulee olla 0,67 keskihajonnan verran keskiarvon yläpuolella.)
b) 70 pistettä (On määritettävä normitettu arvo, jonka alapuolella on 15 % jakaumasta. Määritetään ensin z:n arvo, jonka yläpuolella on 15 % jakaumasta. Taulukon mukaan tällainen arvo on $z \approx 1{,}04$. Siis haluttu normitettu arvo on −1,04, joten hyväksymisrajan tulee olla 1,04 keskihajonnan verran keskiarvon alapuolella.)

347. Keskiarvo 6,8 ja mediaani 7.
Keskiarvo voi nousta enintään 7,3:een ja mediaani 8:aan.

348. 7,49
($\bar{x} = 0{,}013 \cdot 4 + 0{,}098 \cdot 5 + \ldots + 0{,}061 \cdot 10$
tai $\bar{x} = \frac{1{,}3 \cdot 4 + 9{,}8 \cdot 5 + \ldots + 6{,}1 \cdot 10}{100}$)

349. a) $\frac{5}{18} \approx 0{,}28$
(36:sta kahden nopan heitosta 10 on suotuisaa. Alkeistapaukset (1, 1), (1, 2) jne. voidaan merkitä koordinaatiston pisteiksi.)
b) $\frac{25}{324} \approx 0{,}077$ $\left(\frac{5}{18} \cdot \frac{5}{18}\right)$

350. $\frac{1}{4} = 0{,}25$

(Merkitään ympyrän sädettä r. Kivi osuu lähemmäs ympyrän keskipistettä kuin kehää, jos se osuu samankeskiseen ympyrään, jonka säde on $\frac{r}{2}$. Todennäköisyys on ympyröiden pinta-alojen suhde

$\frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{r^2}{4}}{r^2} = \frac{1}{4}$. Suhde voidaan laskea myös yhdenmuotoisuuden avulla: ympyrät ovat yhdenmuotoiset, joten niiden pinta-alojen suhde on säteiden suhteen neliö $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.)

351. a) 44 vuotta (Arvo, jonka alapuolella on 50 % lääkäreistä.)

b) 36 vuotta

c) 51 vuotta

d) 64 % (100 % – 36 %)

e) 33 % (Merkitään lääkäreiden määrää a. Alle 35-vuotiaita lääkäreitä oli $0{,}20a$, yli 55-vuotiaita $0{,}15a$ ja $\frac{0{,}20a}{0{,}15a} \approx 1{,}33 \approx 133\ \%$.

Ylioppilaskokeen arvostelussa osuuksissa sallittiin prosenttiyksikön virhe.)

352. 0,03 %

(Pituutta kaksi metriä vastaava normitettu arvo on $z = \frac{200 - 180{,}0}{5{,}8} \approx 3{,}45$.

Taulukon mukaan arvon yläpuolella on 100 % – 99,97 % havainnoista.)

353. a) 0,057 $(0{,}08 \cdot 0{,}92^4)$

b) 0,34 (P(ainakin yhdellä) = 1 – P(ei yhdelläkään) = $1 - 0{,}92^5$)

c) 0,29 (P(täsmälleen yhdellä) = P(vain ensimmäisellä) + P(vain toisella) + ... + P(vain viidennellä) = $0{,}08 \cdot 0{,}92^4 + 0{,}92 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^3 + ... + 0{,}92^4 \cdot 0{,}08 = 5 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^4$)

354. 0,27

(Pythagoraan lauseella nähdään, että puun etäisyys seinän päistä on 10,6 m ja siis pienempi kuin kaatuneen puun pituus 12,0 m. Puu osuu taloon, jos se kaatuu sektoriin, jonka keskuskulman puolikas α toteuttaa yhtälön $\tan\alpha = \frac{8{,}0}{7{,}0}$.

Saadaan $\alpha \approx 48{,}81°$.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{2\alpha}{360°}$.)

355. a) 32 (Viidessä tehtävässä on kaksi vaihtoehtoa ja viidessä yksi, joten tuloperiaatteen mukaan kokonaisuus voidaan valita $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ tavalla.)

b) 3 003 (15 tehtävän joukolla on $\binom{15}{10}$ erilaista 10 tehtävän osajoukkoa.)

356. 0,94

(P(yksittäinen painovirhe löytyy) = P(ainakin yksi löytää) = 1 – P(kukaan ei löydä) = $1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}994$ ja P(kaikki kymmenen löytyvät) = $0{,}994^{10}$.)

357. a) 48 pistettä
(Normitettu arvo, jonka yläpuolella on 5 % normaalijakaumasta, on 1,64. Laudaturin rajan tulee siis olla 1,64 keskihajontaa keskiarvon yläpuolella eli raja on $27{,}36 + 1{,}64 \cdot 12{,}23 \approx 47{,}4$. Pyöristetään ylöspäin, jotta määrä 5 % ei ylittyisi.)
b) 89,6 %
(Pistemäärää 12 vastaava normitettu arvo on $z = \frac{12 - 27{,}36}{12{,}23} \approx -1{,}26$. Taulukosta nähdään, että arvon $-1{,}26$ oikealla puolella on 89,62 % havainnoista.)

358. 425 g (Normitettu arvo, jonka alapuolella on 5 % havainnoista, on $z \approx -1{,}64$. Massan 400 g tulee olla 1,64 keskihajonnan verran keskiarvon $\bar{x}$ alapuolella eli tulee olla $\bar{x} - 1{,}64 \cdot 15 = 400$.)

359. Todennäköisyys 0,081. Ryhmässä tulisi olla vähintään 842 jäsentä.
(P(ainakin yksi 31:sta syntynyt helmikuun 29. päivänä) = 1 – P(ei kukaan)
$= 1 - \left(\frac{365}{366}\right)^{31}$.

Jos ryhmässä on n jäsentä, niin
$\text{P(ainakin yksi)} = 1 - \left(\frac{365}{366}\right)^{n}$.

Tulee olla $\left(\frac{365}{366}\right)^{n} < 0{,}10$.

Yhtälö $\left(\frac{365}{366}\right)^{n} = 0{,}10$ toteutuu, kun

$n = \frac{\lg 0{,}10}{\lg \frac{365}{366}} \approx 841{,}6$.)

360. 0,054

(78 sienen joukosta voidaan valita $\binom{78}{6}$ erilaista kuuden sienen joukkoa. Suotuisia ovat sellaiset joukot, joissa kaikki kuusi sientä kuuluvat 49 tunnetun sienen joukkoon. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{49}{6}$.)

361. 3,0 g/m^2
(Taulukon mukaan normitettu arvo, jonka alapuolelle jää 5 % havainnoista, on $z = -1{,}64$. Massan 75 g/m^2 tulee siis olla vähintään 1,64 keskihajonnan verran keskiarvon 80 g/m^2 alapuolella. Suurimmalle mahdolliselle keskihajonnalle s on $80 - 1{,}64s = 75$.)

362. a) 0,65 (P(vähintään yksi naimisissa) = 1 – P(ei kukaan naimisissa) = 1 – P(ei kukaan mies naimisissa) · P(ei kukaan nainen naimisissa) = $1 - 0{,}948^8 \cdot 0{,}881^5$)
b) 0,16 (P(vähintään yksi mies ja yksi nainen naimisissa) = P(vähintään yksi mies naimisissa) · P(vähintään yksi nainen naimisissa) = (1 – P(ei kukaan mies naimisissa)) · (1 – P(ei kukaan nainen naimisissa)) = $(1 - 0{,}948^8)(1 - 0{,}881^5)$)

363. keskiarvo 90,3 km/h ja keskihajonta 8,3 km/h
(Normitettu arvo, jonka yläpuolella on 89,25 % havainnoista, on $z \approx -1{,}24$, ja normitettu arvo, jonka yläpuolella on 12,29 % havainnoista, on $z \approx 1{,}16$.
Siis nopeus 80 km/h on 1,24 keskihajonnan s verran keskiarvon $\bar{x}$ alapuolella ja nopeus 100 km/h 1,16 keskihajonnan verran keskiarvon yläpuolella.
Ratkaistaan yhtälöpari
$\bar{x} - 1{,}24s = 80$ ja $\bar{x} + 1{,}16s = 100$.)

364. Todennäköisyys on 0,017. Päättelyä ei voida soveltaa pituuteen ja kengännumeroon.
(Pituusjakaumassa pituutta 190 vastaava normitettu arvo on 3. Taulukon mukaan normitetun arvon 3 yläpuolella on 0,13 % jakaumasta, joten todennäköisyys, että ryhmästä satunnaisesti valitun henkilön pituus on yli 190 cm, on 0,0013.
Älykkyysjakaumassa älykkyysosamäärää 140 vastaava normitettu arvo on 3,17. Normitetun arvon 3,17 yläpuolella on 0,08 % jakaumasta, joten todennäköisyys, että ryhmästä satunnaisesti valitun henkilön ÄO on yli 140, on 0,0008.
Koska pituutta ja älykkyysosamäärää voidaan pitää toisistaan riippumattomina, niin yhdelle ryhmästä valitulle henkilölle on
P(pituus yli 190 cm ja ÄO yli 140)
$= 0{,}0013 \cdot 0{,}0008$. Edelleen
P(ryhmässä ainakin yksi)
$= 1 -$ P(ryhmässä ei yhtään)
$= 1 - (1 - 0{,}0013 \cdot 0{,}0008)^{16500}$.
Koska pituus ja kengännumero eivät ole toisistaan riippumattomat, niin samaa päättelyä ei voida käyttää.)

Sarja E

1. a) $x = -13$ tai $x = 12$ (Ratkaistaan ratkaisukaavalla yhtälö $x^2 + x - 156 = 0$.)

b) $x = \frac{1}{2}$, $y = -3$

2. a) Voidaan. (Levy mahtuu ovesta vinottain, jos sen leveys 210 cm on pienempi kuin oviaukon lävistäjän pituus d. Pythagoraan lauseen nojalla $d^2 = 80^2 + 210^2$, joten $d \approx 225$ cm. Koska $210 \text{ cm} < 225 \text{ cm}$, levy mahtuu ovesta.)

b) 13 km/h (50 m = 0,050 km ja

$14 \text{ s} = \frac{14}{3\,600} \text{ h} \approx 0{,}003889 \text{ h}$.

Nopeus on $\frac{0{,}050}{0{,}003889}$ km/h.)

3. Kate 47,27 euroa, pienenee 51 %.
(Veroton hinta x saadaan yhtälöllä
$1{,}22x = 98{,}90$ €, josta $x \approx 81{,}07$ €, jolloin kate on $81{,}07 \text{ €} - 33{,}80 \text{ €} = 47{,}27$ €.
Alennettu hinta $0{,}7 \cdot 98{,}90 \text{ €} = 69{,}23$ €.
Vastaava veroton hinta saadaan yhtälöllä
$1{,}22y = 69{,}23$ €, josta $y \approx 56{,}75$ €.
Alennetun hinnan kate on
$56{,}75 \text{ €} - 33{,}80 \text{ €} = 22{,}95$ €. Koska
$\frac{22{,}95}{47{,}27} \approx 0{,}49 = 49$ %, kate pienenee 51 %.)

4. 492 m (Jos a on 50°:een kulman viereinen kateetti, niin $\cos 50° = \frac{a}{1\,000}$, josta
$a = 1\,000 \cos 50° \approx 642{,}79$ m. Jos h on suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta, niin $\sin 50° = \frac{h}{a}$, josta $h = a \sin 50°$.)

5. 6,2 % (Jos normitaso on a, niin nykyinen kustannustaso on $1{,}21a$. Oletetaan, että leikkaukset tekevät kustannukset joka vuosi k-kertaisiksi. Tällöin $k^3 \cdot 1{,}21a = a$ eli

$k^3 \cdot 1{,}21 = 1$, josta $k = \sqrt[3]{\frac{1}{1{,}21}} \approx 0{,}938$.)

6. $(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}) = (-\frac{3}{2}, -1\frac{3}{4})$

(Paraabelin pisteen (x, y) koordinaattien summa on $x + y = x + x^2 + 2x - 1$
$= x^2 + 3x - 1$. Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa pienimmän arvon derivaattafunktion $f'(x) = 2x + 3$ nollakohdassa

$x = -\frac{3}{2}$. Tällöin

$y = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot (-\frac{3}{2}) - 1 = \frac{9}{4} - 3 - 1 = -\frac{7}{4}$.)

7. Halkaisija on 0,0051 mm, pituus 6,6 m. (Koska yksi kuutiodesimetri kultaa painaa 19 300 g, niin yksi gramma kultaa on tilavuudeltaan $\frac{1}{19\,300}$ dm$^3 \approx 0{,}00005181$ dm^3.

Oletetaan, että langan pituus
$h = 2{,}5$ km $= 25\,000$ dm, ja olkoon r (dm) langan säde. Tällöin on

$\pi r^2 \cdot 25\,000 = \frac{1}{19\,300}$, josta

$r \approx 0{,}00002568$ (dm).
Oletetaan, että langan säde
$r = 0{,}050$ mm $= 0{,}00050$ dm, ja olkoon h (dm) langan pituus. Tällöin on

$\pi \cdot 0{,}00050^2 \cdot h = \frac{1}{19\,300}$, josta

$h \approx 66$ (dm).)

8. 45 vuodessa (Olkoon a nykykulutus, jolloin maakaasuvarat ovat $70a$. Jos kulutus kasvaa joka vuosi 2,0 %, niin n vuoden kulutus on geometrinen summa

$a + 1{,}02a + 1{,}02^2a + ... + 1{,}02^{n-1}a$

$= \frac{a(1 - 1{,}02^n)}{1 - 1{,}02}$. Yhtälö

$\frac{a(1 - 1{,}02^n)}{1 - 1{,}02} = 70a$, joka ensin jaetaan

a:lla, tulee muotoon $1{,}02^n = 2{,}4$, josta

$n = \frac{\lg 2{,}4}{\lg 1{,}02} \approx 44{,}2$.)

9. Keskiarvo on 0,037 % oikeaa arvoa suurempi.

(Likiarvo $3\frac{1}{8} = 3{,}125$ on pienempi kuin $\pi = 3{,}14159...$. Egyptiläisten mukaan olisi $\pi \cdot 4{,}5^2 = 8^2$ eli $\pi = \frac{64}{4{,}5^2} = 3{,}160...$ eli hieman liian suuri.
Arvioiden keskiarvon suhde lukuun π on

$\frac{\frac{1}{2}\left(3{,}125 + \frac{64}{4{,}5^2}\right)}{\pi} \approx 1{,}00037 = 100{,}037$ %,

joten keskiarvo on 0,037 % π:n oikeaa arvoa suurempi.)

10. Bertta menestyi paremmin. Keskiarvoa paremmin mutta Berttaa huonommin menestyi 38 %, Alinaa paremmin 14 %.
(Alinan pistemäärää vastaava normitettu arvo on $z = \frac{82 - 72}{9{,}2} \approx 1{,}09$ ja Bertan pistemäärää vastaava normitettu arvo $z = \frac{80 - 72}{6{,}8} \approx 1{,}18$. Koska Bertan normitettu arvo on suurempi, Bertta menestyi paremmin. Normitettujen arvojen 0 ja 1,18 välissä on taulukon mukaan 88,10 % – 50 % havainnoista, joten 38 % lukion B oppilaista menestyi keskiarvoa paremmin, mutta Berttaa huonommin. Normitetun arvon 1,09 yläpuolella on taulukon mukaan 100 % – 86,21 % ≈ 14 % havainnoista.)

Sarja F

1. a) $x = -2$ (Kun yhtälö kerrotaan luvulla 6, saadaan yhtälö $3x - 2 = 4x$.)

b) $\frac{25}{7}$ ($\frac{x(xy)^3}{y} = \frac{xx^3y^3}{y} = x^4y^2$ ja $(\sqrt{5})^4 \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 = 25 \cdot \frac{1}{7}$.)

2. a) 3 ja $-\frac{7}{3}$ (Derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2 - 2x - 21$. Nollakohdat löydetään ratkaisemalla yhtälö $3x^2 - 2x - 21 = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.)

b) $(\frac{2}{3}, 6)$ (Kun yhtälöön $3x - y + 4 = 0$ sijoitetaan $y = 6$, saadaan yhtälö $3x - 6 + 4 = 0$.)

3. 8,75 g (Ensimmäisellä viikolla lääkettä tarvitaan 140 mg ja viimeisellä 560 mg. Lääkeaineen kokonaistarve on aritmeettinen summa $25 \cdot \frac{140 + 560}{2} = 8\,750$ (mg).)

4. 41,6 cm (Jos heilurin pituus on x (cm), niin Pythagoraan lauseella saadaan $(x - 7{,}2)^2 + 23{,}4^2 = x^2$ eli $x^2 - 14{,}4x + 7{,}2^2 + 23{,}4^2 = x^2$.)

5. Eivät osu.
(Yhtälöllä $\tan 41° = \frac{x}{15}$ ratkaistaan, kuinka paljon eteläpuolen talon kattoa alemmaksi talon varjo piirtyy vastakkaisen talon seinälle. Saadaan $x \approx 13{,}0$, joten varjo ulottuu 5,0 metrin korkeuteen.)

6. 38 %
(Olkoon a juuston paino, jolloin rasvan määrä on $0{,}28a$. Jos x on kuiva-aineen määrä, niin $0{,}45x = 0{,}28a$, joten $x \approx 0{,}62a$. Veden määrä on $a - 0{,}62a = 0{,}38a$.)

7. Silmälukujen 1, 2, ... , 6 todennäköisyydet ovat 0,048, 0,095, 0,143, 0,190, 0,238 ja 0,286. Todennäköisyys saada kaksi kuutosta on 0,082.
(Jos x on ykkösen todennäköisyys, niin muiden silmälukujen todennäköisyydet ovat $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ ja $6x$. Koska $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1$, niin $x = \frac{1}{21}$. Todennäköisyys saada kahdella heitolla kaksi kuutosta on $\frac{6}{21} \cdot \frac{6}{21}$.)

8. pääkatuun rajoittuva sivu 35 m ja sivukatuun rajoittuva sivu 40 m
(Olkoon pääkatuun rajoittuvan sivun pituus s ja sivukatuun rajoittuvan sivun pituus t. Rakentamiskelpoisen alueen pinta-ala on $A = (s - 5)(t - 10)$. Jos yhtälöstä $2s + 2t = 150$ ratkaistaan $t = 75 - s$, saadaan pinta-ala muuttujan s funktiona
$A(s) = (s - 5)(65 - s) = -s^2 + 70s - 325$.
Funktion $A(s)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa suurimman arvonsa derivaattafunktion
$A'(s) = -2s + 70$ nollakohdassa.)

9. a) 59,6 % b) 2 450
(a) Olkoon isotoopin määrä alussa a. Isotoopin määrä vähenee joka vuosi yhtä monta prosenttia eli määrä tulee joka vuosi kerrotuksi samalla luvulla k. Koska $k^{5730}a = 0{,}5a$ eli $k^{5730} = 0{,}5$, niin
$k = \sqrt[5730]{0{,}5} \approx 0{,}999879$. 7 500 vuoden kuluttua määräksi on tullut $k^{7500}a \approx 0{,}404a$.
b) Jos x on alusta kulunut aika, niin tulee olla $k^x a = 0{,}3a$ eli $k^x = 0{,}3$. Siis
$x = \dfrac{\lg 0{,}3}{\lg k} \approx 9\,953$. Tarvitaan siis
$9\,953 - 7\,500 \approx 2\,450$ vuotta lisää. Likiarvoa laskiessa kannattaa käyttää laskimessa olevaa k:n likiarvoa tai vähintään kuusidesimaalista likiarvoa, koska k:n likiarvon todellinen tarkkuus alkaa vasta alkuyhdeksikköjen jälkeen.)

10. tasaerän suuruus 4 931,64 euroa, viimeinen erä 1 675,13 euroa vuoden 2013 lopussa
(Taulukkokirjan kaavalla saadaan tasaerän suuruus

$$A = 40\,000 \cdot 1{,}04^{10} \cdot \frac{1 - 1{,}04}{1 - 1{,}04^{10}}$$

$\approx 4\,931{,}64$ (€).
Edelleen taulukkokirjan kaavalla saadaan jäljellä oleva lainamäärä viiden vuoden kuluttua:

$$V_5 = 40\,000 \cdot 1{,}04^5 - 4\,931{,}64 \cdot \frac{1 - 1{,}04^5}{1 - 1{,}04}$$

$\approx 21\,954{,}76$ (€).

10 vuoden kuluttua jäljellä oleva lainamäärä on $21\,954{,}76 \cdot 1{,}06^5 - 4\,931{,}64 \cdot \dfrac{1 - 1{,}06^5}{1 - 1{,}06}$

$\approx 1\,580{,}31$ (€).

11 vuoden kuluttua (vuoden 2013 lopussa) lainamäärä ennen tasaerän maksamista on $1{,}06 \cdot 1\,580{,}31$ € $\approx 1\,675{,}13$ € eli pienempi kuin tasaerä. Siis laina tulee maksetuksi vuoden 2013 lopussa ja viimeinen erä on 1 675,13 €.)

Sarja G

1. a) $x = -\frac{13}{11}$

(Yhtälö on $\frac{x+2}{4x+5} = 3$. Kirjoittamalla yhtälö muotoon $\frac{x+2}{4x+5} = \frac{3}{1}$ ja kertomalla ristiin saadaan yhtälö $x + 2 = 3(4x + 5)$.
Samaan muotoon päästään myös, kun yhtälö kerrotaan lausekkeella $4x + 5$.)

b) $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = \frac{1}{3}$

($6x^2 + x - 1 = 18x^2 + 3x - 3$ eli
$-12x^2 - 2x + 2 = 0$ eli $12x^2 + 2x - 2 = 0$)

2. a) 2000-kertaiseksi
$((4x)^2(5y)^3 = 4^2x^2 \cdot 5^3y^3 = 2000x^2y^3)$
b) 714,00 euroa (Jos alkuperäinen hinta oli x, niin $0{,}9 \cdot 1{,}15x = 738{,}99$.)

3. 2 300 m^2
(Alue, jonka nosturi voi saavuttaa, muodostuu suorakulmiosta (sivut 35 m ja 36 m) ja kahdesta puoliympyrästä (yhteensä ympyrästä), joiden säde on 18 m.)

4. 0,14 (P(keskeytyy) = P(ainakin yhdessä toimituksessa häiriö) = 1 – P(ei yhtään häiriötä)
$= 1 - 0{,}99^{15}$)

5. 48 % (Olkoon a alkuperäisen timantin arvo. Jos x on 5,2 g:n timantin arvo, niin

$\frac{x}{a} = \frac{5{,}2^2}{12{,}9^2}$, josta $x = \frac{5{,}2^2}{12{,}9^2}a \approx 0{,}1625a$.

Jos y on 7,7 g:n timantin arvo, niin

$\frac{y}{a} = \frac{7{,}7^2}{12{,}9^2}$, josta $y = \frac{7{,}7^2}{12{,}9^2}a \approx 0{,}3563a$.

Osien yhteisarvo on $x + y \approx 0{,}52a$.)

6. leikkauspiste (1,4; 2,3), etäisyys 2,9 km
(Pisteiden (4, 1) ja (–2, 4) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$ ja yhtälö

$y = -\frac{1}{2}x + 3$. Suorien $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ ja

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ leikkauspisteen x-koordinaatti saadaan yhtälöllä $\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = -\frac{1}{2}x + 3$, josta kertomalla 6:lla saadaan yhtälö
$4x + 8 = -3x + 18$ ja edelleen

$x = \frac{10}{7} \approx 1{,}429$. y-koordinaatti on

$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{7} + 3 = \frac{16}{7} \approx 2{,}286$.

Pisteitä (4, 1) ja $(\frac{10}{7}, \frac{16}{7})$ yhdistävä jana on hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateettien pituudet ovat

$4 - \frac{10}{7}$ ja $\frac{16}{7} - 1$.

Koska tehtävän luvut ovat mittalukuja, tulokset annetaan likiarvoina ja välivaiheissa voidaan käyttää (riittävän tarkkoja) likiarvoja.)

7. a) 42 % b) 36 %
(a) Jos x (dm^3) ja y (dm^3) ovat alkoholin ja veden määrät 1 dm^3:ssä seosta, niin tilavuudesta saadaan yhtälö $x + y = 1$ ja painosta (kg) yhtälö $0{,}79x + 1{,}00y = 0{,}912$.
Ratkaisemalla yhtälöpari saadaan
$x \approx 0{,}4190$ (dm^3).
b) Seoksessa oleva alkoholi painaa
$0{,}4190 \cdot 0{,}79$ kg $\approx 0{,}3310$ kg.
Tämä on 36 % koko seoksen painosta 0,912 kg.)

8. 14 miljoonaa (Ennusteessa oletettiin, että Karachin väkiluku tuli joka vuosi k-kertaiseksi, missä $k^9 \cdot 3{,}43 = 5{,}21$. Saadaan $k = \sqrt[9]{\frac{5{,}21}{3{,}43}} \approx 1{,}04754$. Ennuste oli $k^{25} \cdot 5{,}21 \approx 16{,}64$ (miljoonaa) ja todellinen väkiluku $0{,}84 \cdot k^{25} \cdot 5{,}21 \approx 14$ (miljoonaa).)

9. 0,82 (Säiliön tilavuus on $\pi \cdot 2{,}6^2 \cdot 7{,}6 \approx 161{,}40$ (dm^3) eli 161,40 l. Astia täyttyy, jos sataa vähintään $\frac{161{,}40}{28} \approx 5{,}76$ mm. Sademäärää 5,76 mm vastaava normitettu arvo on $z \approx \frac{5{,}76 - 42}{39} \approx -0{,}93$. Taulukon mukaan todennäköisyys, että havainto on arvon $-0{,}93$ yläpuolella, on 0,82.)

10. Ympyröiden säde voi vaihdella 0 cm:stä 8,0 cm:iin. Tilavuus on suurin, kun säde on 5,3 cm.
(Olkoon r lieriön pohjaympyröiden säde metreinä ja h lieriön korkeus. Rautalankaa on 1 metri, joten $2 \cdot 2\pi r + h = 1$. Ääritapaukset ovat $r = 0$ sekä $h = 0$, jolloin $r = \frac{1}{4\pi} \approx 0{,}080$.

Lieriön tilavuus on $V = \pi r^2 h$.
Lieriön tilavuus muuttujan r funktiona on $V(r) = \pi r^2(1 - 4\pi r) = \pi r^2 - 4\pi^2 r^3$, missä muuttujan r sallitut arvot ovat välillä $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{4\pi}$.

Derivaattafunktion $V'(r) = 2\pi r - 12\pi^2 r^2$ nollakohdat ovat $r = 0$ ja $r = \frac{1}{6\pi} \approx 0{,}053$, ja derivaattafunktion $V'(r)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion $V(r)$ kulkukaavion mukaan funktio $V(r)$ saa suurimman arvon maksimikohdassa $\frac{1}{6\pi}$.)

Hakemisto

aritmeettinen jono 82

aritmeettinen summa 82

binomikerroin 210

derivaatta
- määritelmä 173
- polynomifunktion derivoiminen . 175

derivaattafunktio 175

eksponentti 58

eksponenttifunktio 64

funktion arvojen merkki 51

funktion suurin ja pienin arvo
- toisen asteen funktion suurin ja pienin arvo 181
- suurin ja pienin arvo välillä 190

geometrinen jono 87

geometrinen summa 87

juuri
- neliöjuuri 44
- *n*. juuri 70

kaaren pituus 116

kahden muuttujan epäyhtälö 156

kahden muuttujan yhtälö 155

kantaluku 58

kartio 133

kasvava funktio 185

kertoma 209

keskiarvo 212

keskihajonta 214

kolmioiden yhdenmuotoisuuslause kk 99

kulmakerroin
- määritelmä 147
- kulmakertoimen merkki 148
- laskukaava 148

kymmenpotenssimuoto 62

lieriö 131

lineaarinen optimointi 162

lineaarinen riippuvuus 146

logaritmi 66

lukujono 78

luokkakeskus 212

maksimiarvo 186
maksimikohta 186
mediaani 212
minimiarvo 186
minimikohta 186
mittakaava 98
moodi 212
murtolukujen laskutoimitukset 8
neliöjuuri 44
neljäkäs 113
normaalijakauma 216
normitettu normaalijakauma 216
normittaminen 216
osajoukkojen lukumäärä 210
pallo 137
paraabelin huipun määrittäminen 180
poissulkevat tapahtumat 203
polynomilaskenta 32
potenssi
    eksponentti positiivinen kokonaisluku 58
    eksponentti nolla tai negatiivinen kokonaisluku 61
    murtopotenssimerkintä 71
potenssikaavat 59
prosenttilaskenta
    kuinka monta prosenttia *a* on *b*:stä 20
    kuinka paljon on *p* prosenttia *a*:sta 20
    perusarvon ratkaiseminen 22
    muutos- ja vertailuprosentti 23
prosenttiyksikkö 27
puolisuunnikas 112
Pythagoraan lause 104
rekursiivinen lukujono 78
rekursiokaava 78
riippumattomat tapahtumat 202
sektorin pinta-ala 117
suorakulmainen särmiö 128
suoran yhtälö
    yhtälön muodostaminen 150
    yhtälön ratkaistu muoto 150
suorien yhdensuuntaisuusehto 148
suunnikas 112
säännöllinen monikulmio 114
todennäköisyys
    klassinen todennäköisyys 198
    geometrinen todennäköisyys 200
    kertolaskusääntö 202
    yhteenlaskusääntö 203
    vastatapahtuman todennäköisyys 205
trigonometria 107
tuloperiaate 209

tyyppiarvo 212

vastatapahtuma. 205

verrannollisuus. 38

vähenevä funktio 185

yhdenmuotoisten kuvioiden
pinta-alojen suhde 101

yhdenmuotoisuus 98

yhdenmuotoisuussuhde 98

yhtälö
ensimmäisen asteen yhtälö. 36
neliöyhtälö 45
toisen asteen yhtälö 47
eksponenttiyhtälö 68
potenssiyhtälö. 71

yhtälöparin ratkaiseminen
yhteenlaskumenetelmä 159
sijoitusmenetelmä. 160

ympyrä. 116

ympyrän tangentti 122

ääriarvo 186

ääriarvokohta 186

Normaalijakauman kertymäfunktion Φ arvoja

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9417	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999